Einführung in die Behandlung von Messfehlern

Ein Leitfaden für das Praktikum der Physik

G. Walter und G. Herms

Universität Rostock

2006

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Einteilung von Messfehlern **4**
- 2.1 Grobe Fehler 4
- 2.2 Systematische Fehler 4
- 2.3 Zufällige Fehler 6

3 Messunsicherheit **7**
- 3.1 Runden der Messunsicherheit und der Ergebniszahl 7
- 3.2 Absolute und relative Messunsicherheit, Ergebnisangabe 8

4 Genauigkeit und Präzision **8**

5 Verwendung der Messunsicherheit im Laborbericht **9**

6 Erfassung des Messfehlers einer direkt messbaren Größe **11**
- 6.1 Systematische Fehler 11
- 6.2 Statistische Analyse zufälliger Fehler 14
- 6.3 Abschätzen zufälliger Fehler 17

7 Erfassung des Messfehlers einer nicht direkt messbaren Größe **19**
- 7.1 Mittelwert einer nicht direkt messbaren Größe 19
- 7.2 Fehlerfortpflanzung 19

8 Ausgleich von Messwerten durch eine Gerade (lineare Ausgleichsrechnung, lineare Regression) **24**
- 8.1 Lineare Abhängigkeit $y = a \cdot x + b$ 24
- 8.2 y proportional zu x 26
- 8.3 Lineare Abhängigkeit $y = a \cdot x + b$, mit $a = \pm 1$ 27
- 8.4 Linearisierte Zusammenhänge 27
- 8.5 Linearer Korrelationskoeffizient 29

9 Aufgaben mit Lösungen **30**
- 9.1 Ermittlung des Messunsicherheit einer direkt messbaren Größe 30
- 9.2 Ermittlung des Messunsicherheit nicht direkt messbarer Größen 30
- 9.3 Ausgleich von Messwerten durch eine Gerade 38

Anhang 41

1 Einleitung

Alle physikalischen Experimente, auch wenn sie mit größter Sorgfalt ausgeführt werden, sind mit Messfehlern (kurz Fehler; engl.: error) behaftet. Das Wort Fehler bezeichnet in Bezug auf die Messung nicht das Fehlverhalten des Experimentators oder die Falschheit des Messergebnisses, sondern die Messabweichung. Eine Aufgabe der Auswertung von wissenschaftlichen Experimenten besteht darin, die Messfehler zu analysieren und quantitativ durch Berechnung bzw. durch Schätzung zu erfassen. Die als Resultat aus einer derartigen Messfehlerbehandlung (kurz Fehlerrechnung) erhaltene sog. Messunsicherheit (engl.: uncertainty) ist Bestandteil des Schlussergebnisses.

Ein Messergebnis, das als Information an die Allgemeinheit (z. B. in einer Veröffentlichung) oder an bestimmte Interessenten (z.B. an die Auftraggeber eines Gutachtens, an die Käufer eines Erzeugnisses) weitergegeben wird, muss gewisse Voraussetzungen erfüllen. Da jede Messung nur einen Näherungswert für die interessierende Messgröße liefert, dessen Grenzwert der wahre Wert der Messgröße ist, muss die Genauigkeit der Näherung durch eine Messunsicherheit beschrieben werden. Dieses hat in der Sprache der Mathematik, internationalen Regeln entsprechend, zu erfolgen. Vage und unquantifizierbare Phrasen wie: "Die erhaltenen Werte waren ziemlich gut ..., ... ganz gut ..., ... annehmbar gut ..." sind strikt abzulehnen. Das gilt auch für bedeutungslose Feststellungen wie: "Die Länge wurde genau gemessen ..., Die Beziehung war nahezu linear ..." [1].

Selbst dann, wenn die Messunsicherheit eines Messergebnisses nicht explizit angegeben wird, ist ihre Kenntnis unerlässlich, muss doch der veröffentlichte Zahlenwert bestimmte Voraussetzungen bezüglich der angegebenen Stellenzahl erfüllen. Die vorletzte der angegebenen Stellen muss zuverlässig und die letzte Stelle darf höchstens um eine halbe Einheit unsicher sein [2]. Ein Ergebnis $x = 3{,}14$ ist dementsprechend so zu interpretieren, dass x zwischen 3,135 und 3,145 liegt. Dabei ist es klar, dass die berechnete Messunsicherheit alle Fehlerquellen berücksichtigen muss. Die häufig anzutreffende Verfahrensweise, mit der angegebenen Messunsicherheit lediglich einen Teil der Messfehler zu erfassen und den übrigen Teil nur verbal zu erwähnen, ist daher in den meisten Fällen als wenig sinnvoll abzulehnen.

Erfahrungsgemäß bereitet es dem Studierenden weniger Schwierigkeiten, die verschiedenen Methoden der Behandlung von Messfehlern zu verstehen, als vielmehr zu entscheiden, welche davon bei den gegebenen Bedingungen der Messung anzuwenden sind, um die Messunsicherheit richtig zu bestimmen. Insbesondere für die Lösung dieses Problems soll der vorliegende Leitfaden eine Hilfestellung geben.

2 Einteilung von Messfehlern

2.1 Grobe Fehler

Grobe Fehler werden durch den Experimentator verursacht, durch Unaufmerksamkeit, Irrtümer, Fehlüberlegungen und dgl. mehr. Sie sind prinzipiell vermeidbar und kein Gegenstand der Messfehlerbehandlung.

Zur Vermeidung grober Fehler sind äußerste Sorgfalt sowie Kontrollen, insbesondere durch eine zweite Person, erforderlich.

2.2 Systematische Fehler

Ein systematischer Fehler liegt vor, wenn:

(a) für Messungen unter gleichen Bedingungen der Messfehler konstant bleibt,

(b) bei gesetzmäßiger Änderung der Versuchsbedingungen der Messfehler sich gleichfalls gesetzmäßig verändert, z.B. bei einem Thermometer mit zu großem Abstand zwischen Eispunkt- und Siedepunktmarke, oder aber der absolute Fehler konstant bleibt, z.B. bei einem Thermometer mit richtig geteilter, aber verschobener Skale.

Systematische Fehler sind durch Wiederholung der Messung unter gleichen Bedingungen nicht erkennbar. Sie machen das Ergebnis **unrichtig**.

Systematische Fehler können ihre Ursache in allen bei der Messung beteiligten Elementen haben:

- im Messobjekt (z.B. Dickenmessung einer Platte, deren Oberfläche stellenweise mit kleinen Körnchen belegt ist, inhomogener Werkstoff bei der Dichtemessung)
- im Messinstrument (z.B. Eigenverbrauch elektrischer Messgeräte, falsche Kalibrierung[1] von Instrumenten, wie Uhren, Lineale, Thermometer u. ä.)
- in Maßverkörperungen (z.B. Abnutzung von Widerstandsnormalen oder Endmaßen, Ablagerungen in Messkolben)
- in der Umwelt (z.B. Temperatur- und Druckeinflüsse, elektrische und magnetische Störfelder)
- beim Beobachter (z.B. Parallaxenfehler, Beurteilung der Scharfeinstellung eines optischen Gerätes)

[1] Kalibrieren ist das Feststellen des Zusammenhangs zwischen Ausgangsgröße und Eingangsgröße am fertigen Messgerät (DIN 1319). Eichen bezeichnet dagegen die von der Eichbehörde durchgeführten Prüfungen von Messgeräten.

- im Messverfahren (z.B. Rückwirkung der Messinstrumente auf das zu unter-suchende System, wie bei der direkten Messung der elektromotorischen Kraft eines Elementes mit einem Spannungsmesser statt Messung mit Hilfe einer Kompensationsschaltung).

Es sind grundsätzlich zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden:

(A) Der systematische Fehler ist **erfassbar**, wenn er aus der Ursache heraus nach Größe und Vorzeichen berechenbar ist. Der Messwert ist um den Wert dieses Messfehlers zu berichtigen.

Beispiel: Auftriebskorrektur bei der Wägung Ist die Dichte ϱ_K des zu wägenden Körpers eine andere als die Dichte ϱ_W der Wägestücke, dann erfahren sie in Luft (Dichte ϱ_L) einen unterschiedlichen Auftrieb. Die Masse des Körpers m_K ergibt sich dann aus dem scheinbaren Wert der Masse m_s gemäß der Formel:

$$m_K = m_s \left(1 + \frac{\varrho_L}{\varrho_K} - \frac{\varrho_L}{\varrho_W}\right) . \tag{2.1}$$

(B) Der systematische Fehler ist **nicht erfassbar**, wenn mehrere Fehlerursachen in nicht überschaubarer Weise zusammenwirken oder die Korrektur undurchführbar ist, weil der formelmäßige Zusammenhang fehlt oder bestimmte Parameter nicht bekannt sind. Für den nicht erfaßbaren systematischen Fehler ist eine obere Grenze dem Betrag nach abzuschätzen.

Der Zahlenwert für die obere Schranke des nicht erfassbaren systematischen Fehlers wird gewonnen unter Berücksichtigung der Versuchsbedingungen durch Addition der maximal möglichen Beträge der:

- (mit $\pm$ angegebenen) Fehlergrenzen oder abgeschätzten Fehler der benutzten Messinstrumente oder Maßverkörperungen,
- abgeschätzten Fehlereinflüsse des verwendeten, unvollkommenen Messverfahrens,
- abgeschätzten Fehlereinflüsse des Beobachters und der Umwelt,
- Ungenauigkeiten der zur Auswertung benutzten Formeln (z.B. bei Näherungsausdrücken).

Dabei sollte eher zu groß als zu klein geschätzt werden, um sicherzustellen, daß der wahre Wert in dem durch die Messunsicherheit (siehe Kap. 3) definierten Bereich der Messgröße liegt. Um Arbeit zu sparen, dürfen auch erfassbare systematische Fehler in dieser Weise behandelt werden, wenn die Unrichtigkeiten nicht zu groß sind. Die systematischen Fehler der Messgrößen $x, y, ...$ werden mit $\Delta x_s, \Delta y_s, ...$ bezeichnet; der Index s bedeutet "systematisch".

Eine andere Aufgabe, systematischen Fehlern zu begegnen, besteht darin, sie zu erkennen und durch geeignete Messverfahren auszuschalten bzw. klein zu halten. So wird z.B. die Ungleicharmigkeit der Waage durch nochmaliges Wägen nach Austausch von Wägegut und Wägestücken unschädlich gemacht. Exzentrizitätsfehler bei Teilkreisen werden durch Ablesen an zwei um 180^{o} versetzte Nonien eliminiert. Langzeitveränderungen einer Strahlungsquelle können durch eine Monitoranordnung erfaßt werden. Um zu erreichen, dass bei der Messung elektrischer Spannungen kein Strom fließt, wird eine Kompensationsschaltung verwendet.

2.3 Zufällige Fehler

Ein Messfehler heißt zufälliger Fehler, wenn bei wiederholten Messungen derselben Größe

- positive und negative Messfehler gleich häufig sind,
- die Häufigkeit mit dem absoluten Betrag des Messfehlers abnimmt,
- die Häufigkeit ein Maximum besitzt, wenn der Betrag des Messfehlers gegen Null geht.

Zufällige Fehler sind **unvermeidbar**. Sie machen das Messergebnis **unsicher**. Ihre Ursachen, die häufig komplex zusammenwirken, können in den folgenden, bei einem Experiment auftretenden Unzulänglichkeiten zu finden sein:

- im *Messobjekt* selbst (z.B. zufällig verteilte Inhomogenitäten der Struktur bei Härtemessungen, statistische Gesetzmäßigkeiten des radioaktiven Zerfalls),
- im *Messinstrument* (z.B. kleine nicht erfaßbare Verlagerungen der Auflagepunkte im Zeigersystem eines Drehspulinstrumentes oder bei einer Waage, Spannungs- und Frequenzschwankungen einer Wechselstromquelle),
- in *Maßverkörperungen* (z.B. zeitliche Schwankungen der Lichtstärke einer Normallampe in der Photometrie, Schwankungen einer als Vergleichsnormal benutzten radioaktiven Quelle)
- in der *Umwelt* (z.B. Erschütterungen und Luftbewegungen beim Wägen, Druck- und Temperaturschwankungen),
- beim *Beobachter* (z.B. Schwankungen der Auffassung in der Beurteilung der Bildschärfe bei Brennweitenbestimmungen, schwankende Reaktionsgeschwindigkeiten beim Stoppen).

Die aufgezählten Elemente sind materieller Natur. Der ideelle Faktor Messverfahren kommt dagegen als Ursache zufälliger Fehler nicht in Frage.

Werden die zufälligen Fehler der Messgrößen $x, y, ...$ abgeschätzt, so werden sie mit $\Delta x_z, \Delta y_z, ...$ bezeichnet; der Index z bedeutet "zufällig". Wird dagegen eine statistische Fehleranalyse vorgenommen (vergleiche » Kap. 6.2.1), so werden die Vertrauensgrenzen $\tau \cdot s_{\bar{x}}, \tau \cdot s_{\bar{y}}, ...$ angegeben.

3 Messunsicherheit

Als Resultat der Messung einer Messgröße x wird das Messergebnis, i.A. das arithmetische Mittel (vergleiche Kap. 6.2.1), zusammen mit der **Messunsicherheit** u_x (u von **u**ncertainty; der Index x bezeichnet die betreffende Messgröße) angegeben. Die Messunsicherheit setzt sich dabei additiv aus dem systematischen und dem zufälligen Fehler zusammen, d.h.

$$u_x = |\Delta x_s| + |\Delta x_z|\,, \tag{3.1}$$

oder, wenn die Standardabweichung des Mittelwertes $s_{\bar{x}}$ berechnet werden kann (vergleiche Kap. 6.2.1),

$$u_x = |\Delta x_s| + \tau \cdot s_{\bar{x}}\,. \tag{3.2}$$

$|\Delta x_s|$ ist der abgeschätzte Größtbetrag des systematischen Fehlers und $|\Delta x_z|$ ist der des zufälligen Fehlers. Bei der Vertrauensgrenze $\tau \cdot s_{\bar{x}}$ (vergleiche Kap. 6.2.1) sollte das gewählte Vertrauensniveau stets angegeben werden. Wenn nicht anders gefordert, soll die **Vertrauensgrenze** angegeben werden, die einem **95%-Vertrauensniveau** entspricht (Empfehlung der International Organization for Standardization, ISO 3534).

3.1 Runden der Messunsicherheit und der Ergebniszahl

Die Ergebniszahl und die Messunsicherheit werden an der gleichen Stelle gerundet. Die Messunsicherheit wird immer aufgerundet. Die Ergebniszahl wird abgerundet, wenn hinter der Rundestelle eine der Ziffern 0 bis 4 steht, dagegen aufgerundet, wenn hinter der Rundestelle eine der Ziffern 5 bis 9 steht.

Auffinden der Rundestelle der Messunsicherheit [4]:
Von links beginnend ist die erste von Null verschiedene Ziffer zu suchen. Ist diese eine der Ziffern 3 bis 9, so ist sie die Rundestelle; ist die erste von Null verschiedene Ziffer eine 1 oder 2, so ist die Stelle rechts daneben die Rundestelle.
Beispiele:

Ergebniszahl:	8,579617	8,579617
Messunsicherheit u:	0,00383	0,001632
Rundestelle:	0,00**3**83	0,001**6**32
aufgerundete Messunsicherheit:	0,004	0,0017
gerundete Ergebniszahl:	8,580	8,5796

3.2 Absolute und relative Messunsicherheit, Ergebnisangabe

Messunsicherheiten können absolut oder relativ zum Messergebnis angegeben werden. Die **absolute Messunsicherheit** u_x hat stets dieselbe Dimension wie die Messgröße selbst. Demgegenüber ist die **relative Messunsicherheit** $u_x/\bar{x}$ (mit $\bar{x}$ als Bestwert für den wahren Wert) dimensionslos. Das ermöglicht, die Messunsicherheiten verschiedenartiger Messgrößen miteinander zu vergleichen. Die Angabe erfolgt meist als prozentuale Messunsicherheit. Damit lautet das Schlussergebnis:

$$x = \bar{x} \pm u_x \quad \text{bzw.} \quad x = \bar{x}\left(1 \pm \frac{u_x}{\bar{x}}\right) . \tag{3.3}$$

Beispiel 1: Die Dicke d eines Stabes wurde an verschiedenen Stellen mit einer Feinmessschraube gemessen. Es wurden folgende Werte ermittelt:

$$\begin{aligned} \text{arithmetisches Mittel:} \quad \bar{d} &= 5{,}9889 \text{ mm} \\ \text{absolute Messunsicherheit:} \quad u_d &= 0{,}00985 \text{ mm} \\ \text{relative Messunsicherheit:} \quad u_d/\bar{d} &= 0{,}001654 \end{aligned}$$

Das Resultat der Messung lautet:

$$\begin{aligned} d &= (5{,}989 \pm 0{,}010)\text{mm} \\ \text{oder} \quad d &= 5{,}989(1 \pm 0{,}17\%)\text{mm} . \end{aligned}$$

Angaben wie $d = 5{,}989\text{mm} \pm 0{,}17\%$ sind dagegen sinnlos, da Längen und Zahlen nicht addiert werden können.

Beispiel 2: Als absolute Messunsicherheit einer wiederholten Widerstandsmessung, die als Ergebnis das arithmetische Mittel $\bar{R} = 16{,}812\,\Omega$ ergab, wurde $u_R = 0{,}1529\,\Omega$ ermittelt. Die relative Messunsicherheit ist $u_R/\bar{R} = 0{,}009095$. Das Messergebnis lautet $R = (16,81 \pm 0,16)\,\Omega$ oder $R = 16,81(1 \pm 0,9\%)\,\Omega$.

Beispiel 3: Als Resultat einer Zeitmessung wurde das arithmetische Mittel $\bar{t} = 91{,}513$ s erhalten. Die absolute Messunsicherheit hat den Wert $u_t = 1{,}08151$ s, die relative Messunsicherheit ist $u_t/t = 0{,}01182$. Das Messergebnis ist $t = (91{,}5 \pm 1{,}1)$ s oder $t = 91{,}5(1 \pm 1,2\%)$ s.

4 Genauigkeit und Präzision

Die **Genauigkeit** (engl.: accuracy) eines Experimentes bezieht sich auf die Abweichung des Messergebnisses vom wahren Wert. Sie stellt ein Maß für die Richtigkeit des Messergebnisses dar. Die **Präzision** (engl.: precision) eines Experimentes gibt dagegen an, wie exakt das Messergebnis ist ohne Bezug auf den wahren Wert. Sie ist auch ein Maß für die Reproduzierbarkeit eines Messergebnisses.

Während die Genauigkeit vor allem durch die systematischen Fehler geprägt wird, hängt die Präzision von der Größe der zufälligen Fehler ab. Es ist sinnlos, ein Experiment mit hoher Präzision auszuführen, wenn bekannt ist, dass die Genauigkeit gering ist, und andererseits kann ein Messresultat nicht als extrem genau betrachtet werden, wenn die Präzision gering ist [3].

5 Verwendung der Messunsicherheit im Laborbericht

Die meisten Experimente führen zu einem quantitativen Ergebnis. In der Regel ist das Experiment jedoch nicht mit der bloßen Mitteilung der Ergebniszahl abgeschlossen. Vielmehr ist das Messergebnis mit dem Ziel zu analysieren, Schlussfolgerungen über das durchgeführte Experiment und den physikalischen Sachverhalt abzuleiten. Im Physikalischen Praktikum kann das folgende Vorgehen nützlich sein:

1. Das Messergebnis wird mit einem **akzeptierten Wert** verglichen. Akzeptierte Werte, i.A. mit hoher Genauigkeit gemessen, können der Literatur entnommen werden, z.B. $e = (1{,}6021773 \pm 0{,}0000005) \cdot 10^{-19}$ C für die Elementarladung oder $F = (96485{,}31 \pm 0{,}03)$ C/mol für die Faraday-Konstante.

   Beispiel: Im Praktikum hat ein Student mit Hilfe eines Fadenpendels für die Erdbeschleunigung das Ergebnis $g = (9{,}83 \pm 0{,}05)\ \mathrm{m/s^2}$ erhalten. Ein akzeptierter Wert für die Erdbeschleunigung (Gebäude des Fachbereiches Physik, Rostock) ist $g = (9{,}814285 \pm 0{,}000001)\ \mathrm{m/s^2}$. Die **Diskrepanz**, das ist die Differenz zwischen zwei Messwerten derselben Messgröße, beträgt $\approx 0{,}02\ \mathrm{m/s^2}$ und ist damit kleiner als die Messunsicherheit $u_g = 0{,}05\ \mathrm{m/s^2}$. Die Diskrepanz kann als **insignifikant** angesehen werden, und es kann geschlossen werden, dass sowohl die experimentelle Durchführung als auch die Auswertung zufriedenstellend abgelaufen sind. Um insbesondere Rückschlüsse auf das verwendete Messverfahren ziehen zu können, empfiehlt es sich, die zu der Messunsicherheit des Messergebnisses (hier: u_g/g) beitragenden Messunsicherheiten der einzelnen Messgrößen (hier: u_l/l und u_T/T) miteinander zu vergleichen und zu untersuchen.
   Anders verhält es sich, wenn das Messresultat $g = (9{,}91 \pm 0{,}05)\ \mathrm{m/s^2}$ ist. Die Diskrepanz von $\approx 0{,}1\ \mathrm{m/s^2}$ ist **signifikant**, und es muss vermutet werden, dass die Rechnung oder die Durchführung des Experimentes nicht korrekt abgelaufen sind. In einigen Fällen ist auch zu untersuchen, ob der akzeptierte Wert passend ist, d. h., ob z.B. die Bedingungen, wie Druck, Temperatur u. ä., unter denen er ermittelt wurde, für das von dem Studenten durchgeführte Experiment zutreffen.

2. Das Messergebnis wird mit einem theoretisch vorhergesagten Wert verglichen.

   Beispiel: Die Theorie sagt voraus, dass der Gesamtimpuls eines isolierten Systems konstant ist. Zur Überprüfung dieses Erhaltungssatzes möge der Gesamtimpuls zweier Wagen vor dem Zusammenstoß, $p = (0{,}260 \pm 0{,}005)$ kg·m/s, und nach dem Zusammenstoß, $p' = (0{,}251 \pm 0{,}006)$ kg·m/s, gemessen worden sein. Da die Differenz der Messwerte $p - p' = 0{,}009$ kg·m/s kleiner ist als die Summe der Messunsicherheiten $u_p + u_{p'} = 0{,}011$ kg·m/s (die Summe resultiert aus der Fehlerfortpflanzung, vergleiche Anhang A2) kann die Impulserhaltung als bestätigt angesehen werden. Wäre $p - p' > u_p + u_{p'}$, müsste überprüft werden, ob evtl. Rechenfehler vorliegen oder ob das Experiment, z. B. durch auftretende Reibung, verfälscht worden ist.

3. Die von unterschiedlichen Experimentatoren erhaltenen Messergebnisse werden miteinander verglichen.

   Beispiel: Ein Student (A) ermittelt die Dichte eines Glases zu $\varrho_A = (2{,}67 \pm 0{,}08)$ g/cm^3, der Student (B) erhält als Ergebnis der Messung an derselben Probe $\varrho_B = (2{,}44 \pm 0{,}05)$ g/cm^3. Da die Diskrepanz $\varrho_A - \varrho_B = 0{,}23$ g/cm^3 größer ist als die Summe der Messunsicherheiten $u_{\varrho_A} + u_{\varrho_B} = 0{,}13$ g/cm^3, muss die Diskrepanz als signifikant bezeichnet werden. In diesem Falle müssten die Durchführung des Experimentes und die Auswertung überprüft werden.

6 Erfassung des Messfehlers einer direkt messbaren Größe

6.1 Systematische Fehler

Bei der Abschätzung des systematischen Fehlers sind vor allem die Fehlergrenzen, z.B. Garantie- oder Eichfehlergrenzen, der benutzten Messgeräte und Maßverkörperungen zu berücksichtigen. Die Fehlerangabe eines Messgerätes oder einer Maßverkörperung, als **Fehlergrenze** bezeichnet, ist begrifflich streng von der Messunsicherheit zu unterscheiden.

Fehlergrenzen sind die vereinbarten oder garantierten Höchstbeträge für Abweichungen vom Sollmaß oder vom Nennwert.

Sind **Garantiefehlergrenzen** angegeben, wird vom Hersteller garantiert, dass der Fehler der mit dem Messgerät oder der Maßverkörperung unter bestimmten Bedingungen ermittelten Werte innerhalb vorgeschriebener Grenzen liegt (z.B. angegebene Güteklasse eines elektrischen Messinstrumentes, s.u.).

Eichfehlergrenzen bezeichnen die größten zugelassenen Abweichungen der Anzeige von dem Wert, der beim Vergleich mit einem Normal erreicht wird (z.B. bei Thermometern, s.u.).

Im Folgenden werden für einige insbesondere im Praktikum gebräuchliche Messgeräte und Maßverkörperungen Garantie- und Eichfehlergrenzen angegeben[2].

Längenmessung

Für Längenmaße mit Teilung, Messschieber, Messschrauben und Messuhren gilt:

$$\Delta l_s = \pm(a + b \cdot l)$$

wobei l die zu messende Strecke ist. Die Konstanten a und b haben folgende Werte[3]:

Instrument	Holzlineal	Stahlmaßstab	Messschieber	Messschraube	Messuhr
a	0,5 mm	0,05 mm	0,05 mm	0,005 mm	0,01 mm
b	10^{-3}	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{-4}	10^{-5}	$5 \cdot 10^{-4}$

Komparator nach Abbe: $\Delta l_s = \pm 0{,}5\ \mu$m,

Interferenzkomparator: bis $\Delta l_s = \pm 0{,}001\ \mu$m,

Maßstabmessplatte (Objektmikrometer, 1 mm Länge): $\Delta l_s = \pm 2\ \mu$m,

Maßstabprüfokular (Okularmikrometer, 10 mm Länge): $\Delta l_s = \pm 20\ \mu$m,

[2]Falls die Garantiefehlergrenzen der im Praktikum tatsächlich verwendeten Messgeräte davon abweichen, wird der Betreuer des Versuches Sie ggf. darauf hinweisen.

[3]Korrektur des Wertes für b beim Stahlmaßstab duch T.B., der gewählte Wert entspricht der EG-Klasse EG II für einen Stahlmaßstab der Teilungslänge 1000 mm.

Winkelmessung
mit Halbkreiswinkelmesser, in Grad geteilt:
bei 100 mm Durchmesser Teilungsfehler $= \pm(10' + 0{,}1'n)$,
bei 150 mm oder 200 mm Teilungsfehler $= \pm(10' + 0{,}05'n)$,
wenn $n =$ Anzahl der Teilstriche, Winkel $< 180^o$.

Volumenmessung
Pyknometer, amtlich geeicht. (Bei nicht geeichten Pyknometern muss mit dem fünffachen Fehler gerechnet werden.)

V /ml	bis 10	10 bis 50	über 50
$\pm\Delta V_s$/ml	0,001	0,002	0,003

Messzylinder:

V /ml	10	25	50	100	250	500	1000	2000
$\pm\Delta V_s$/ml	0,1	0,5	0,5	1	2	5	10	20

Zeitmessung
LCD-Quarz-Stoppuhr bei einmaliger Messung:

$$\Delta t_s = \pm(0{,}01\ \text{s} + 5 \cdot 10^{-6} \cdot t)$$

Mechanische Stoppuhr bei einmaliger Messung:

$$\Delta t_s = \pm(0{,}2\ \text{s} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot t) \quad \text{(Zeiger läuft in 30 s um)}\ ,$$
$$\Delta t_s = \pm(0{,}4\ \text{s} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot t) \quad \text{(Zeiger läuft in 60 s um)}\ .$$

Bei *Messreihen* genügt es, nur das zweite Glied (den sog. Gangfehler, $\Delta t_s = \pm 5 \cdot 10^{-6} \cdot t$ bzw. $\Delta t_s = \pm 5 \cdot 10^{-4} \cdot t$) zu berücksichtigen. Bei länger im Gebrauch befindlichen mechanischen Uhren kann der Gangfehler $5 \cdot 10^{-3} \cdot t$ bis $2 \cdot 10^{-2} \cdot t$ betragen.

Massenbestimmung (Wägung)
Balkenwaage

Feinwägestücke aus Aluminium	5 mg bis 100 mg	$\Delta m_s = \pm 0{,}5$mg
Feinwägestücke aus vernickeltem Messing	1 g bis 100 g	$\Delta m_s = \pm 0{,}5$mg
Wägestücke aus Messing	1 g bis 50 g	$\Delta m_s = \pm 10{,}0$mg
Wägestücke aus Messing	100 g bis 500 g	$\Delta m_s = \pm 30{,}0$mg
Grobwägestücke aus Eisen	5 g bis 1000 g	$\Delta m_s = \pm 50{,}0$mg

Oberschalenwaage

Höchstlast	bis 50 g	50 g bis 200 g	200 g bis 1000 g
160 g	±5 mg	±10 mg	–
1000 g	±50 mg	±100 mg	±150 mg

Höchstlast	bis 500 g	500 g bis 2000 g	über 2000 g
2 kg	±0,5 g	±1,0 g	–
5 kg	±0,5 g	±1,0 g	±1,5 g
10 kg	±0,5 g	±1,0 g	±1,5 g

Elektrische Messungen
Es ist die auf der Skale angegebene Güteklasse des Messinstrumentes zu beachten: "0,2" bedeutet: Der Fehler beträgt $\pm 0,2\%$ vom Endausschlag. Beispielsweise 2%, wenn der Zeigerausschlag auf einer 100-teiligen Skale 10 Skalenteile beträgt.

Gleichstromkompensator: ±0,02% vom Sollwert.

Normalwiderstände:
bei 15 ^{o}C bis 25 ^{o}C, gering belastet $\Delta R_s = \pm 0{,}0003 \cdot R$.

Widerstandssätze:
bei 20 ^{o}C, gering belastet

$$\Delta R_s = \pm(0{,}02\,\Omega + 0{,}01 \cdot R) \qquad \text{für} \quad R < 0{,}1\,\Omega,$$
$$\Delta R_s = \pm(0{,}02\,\Omega + 0{,}001 \cdot R) \qquad \text{für} \quad 0{,}1\,\Omega \leq R \leq 10\,\Omega,$$
$$\Delta R_s = \pm(0{,}02\,\Omega + 0{,}0003 \cdot R) \qquad \text{für} \quad R > 10\,\Omega.$$

Temperaturmessungen
Kalorimeterthermometer: $\Delta T_s = \pm 0{,}02$ K.

Laborthermometer

Teilung in	Grad	Halbgrad	Fünftelgrad	Zehntelgrad
-5 ^{o}C bis 60 ^{o}C	±0,7 K	±0,5 K	±0,2 K	±0,15 K
60 ^{o}C bis 110 ^{o}C	±1,0 K	–	±0,3 K	±0,25 K
110 ^{o}C bis 210 ^{o}C	±1,5 K	±1,0 K	±0,5 K	–
210 ^{o}C bis 310 ^{o}C	±2,0 K	±1,5 K	–	–
310 ^{o}C bis 400 ^{o}C	±2,5 K	–	–	–

6.2 Statistische Analyse zufälliger Fehler

6.2.1 Mittelwert, Standardabweichung, Vertrauensbereich

Durch wiederholte Messung derselben Messgröße x sei die endliche Messreihe $x_1, \ldots, x_n$ entstanden. Wenn angenommen werden kann, dass alle Messwerte x_i die Normalverteilung (Gaußverteilung) erfüllen[4] und wenn weiterhin die Parameter dieser Verteilung μ (Zentrum der Verteilung) und σ (Breiteparameter) bekannt wären, könnte die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Messwert x_i im Intervall $x_i + dx_i$ liegt, berechnet werden:

$$P(x_i) = P(x_i \leq x < x_i + \mathrm{d}x_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}x_i \,. \tag{6.1}$$

Das Produkt

$$P(x_1) \cdot P(x_2) \cdot \ldots P(x_n) = \frac{1}{\sigma^n \sqrt{2\pi}^n} e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \tag{6.2}$$

gibt die Wahrscheinlichkeit an, die gesamte Menge der Messwerte $x_1, \ldots, x_n$ beobachten zu können.

Da die interessierenden Parameter μ (“wahrer Wert” von x) und σ (Standardabweichung) immer unbekannt bleiben, müssen auf der Grundlage der n Messwerte Näherungswerte für μ und σ, mit $\bar{x}$ bzw. s bezeichnet, ermittelt werden. Nach Gauß sind solche Werte als Näherungswerte für μ und σ plausibel, für die die erhaltenen Messresultate $x_1, \ldots, x_n$ die wahrscheinlichsten sind, d.h., die durch das Produkt (6.2) ausgedrückte Wahrscheinlichkeit muss ein Maximum annehmen (Prinzip der größten Wahrscheinlichkeit; engl.: maximum likelihood principle). Das ist für μ der Fall, wenn

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{2\sigma^2} = \mathrm{Min} \,. \tag{6.3}$$

Diese Bedingung führt zum **arithmetischen Mittel**

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \,. \tag{6.4}$$

Die Bedingung, dass das Produkt (6.2) einen maximalen Wert annimmt, führt bei bekanntem μ auf

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2} \,. \tag{6.5}$$

Als Näherungswert für den Breiteparameter σ wird die sog. *Standardabweichung der Grundgesamtheit* erhalten:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \,. \tag{6.6}$$

[4] Die Annahme, dass die Messwerte normalverteilt sind, trifft für eine Vielzahl von Messungen zu, insbesondere dann, wenn eine Messung vielen Quellen kleiner zufälliger Abweichungen unterliegt [2].

Es empfiehlt sich jedoch, statt dieser Standardabweichung immer die *Stichproben-Standardabweichung*,

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\,, \tag{6.7}$$

als Maß für die Unsicherheit der Einzelmessung zu verwenden [2, 5], insbesondere dann, wenn die Anzahl der Messwerte klein ist ($n < 30$). Die Größe s_x^2, die, wie s_x selbst, ein Maß für die Streuung der Messwerte um den Mittelwert darstellt, wird als **Varianz** bezeichnet.

Die Unsicherheit des Näherungswertes $\bar{x}$ ist die **Standardabweichung des Mittelwertes**:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\,. \tag{6.8}$$

Die Standardabweichung $s_{\bar{x}}$ ermöglicht, die **Vertrauensgrenze** $\tau \cdot s_{\bar{x}}$ zu berechnen, die den Vertrauensbereich $\bar{x} \pm \tau \cdot s_{\bar{x}}$ definiert, innerhalb dessen der wahre Wert μ der Messgröße x mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit zu erwarten ist:

$$\bar{x} - \tau \cdot s_{\bar{x}} < \mu < \bar{x} + \tau \cdot s_{\bar{x}}\,. \tag{6.9}$$

Die zum Festsetzen der Größe des Intervalls $\bar{x} \pm \tau \cdot s_{\bar{x}}$ gewählte Wahrscheinlichkeit wird als Vertrauensniveau bezeichnet. Der Faktor τ hängt von dem Vertrauensniveau und außerdem von der Anzahl der Freiheitsgrade ν ab (siehe Tabelle 1). Die Anzahl der Freiheitsgrade ergibt sich aus der Anzahl der unabhängigen Messungen, verringert um die Anzahl der aus den betreffenden Messwerten berechneten Parameter, so dass bei der Berechnung des Vertrauensbereiches nach Gl. (6.9) $\nu = n - 1$ ist.

Tabelle 1: Werte für τ in Abhängigkeit von der Anzahl ν der Freiheitsgrade für ein 95%-Vertrauensniveau

ν	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
τ	4,303	3,182	2,776	2,571	2,447	2,365	2,306	2,262	2,228	2,201

ν	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
τ	2,179	2,160	2,145	2,131	2,120	2,110	2,101	2,093	2,086	2,080

ν	22	23	24	25	26	27	28	29	30	∞
τ	2,074	2,069	2,064	2,060	2,056	2,052	2,048	2,045	2,042	1,960

6.2.2 Mittelwert und Standardabweichung von Messwerten ungleicher Genauigkeit

Es kann vorkommen, dass für eine Messgröße x verschiedene Messergebnisse (Mittelwerte) $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m$ vorliegen, die sich aus m Messreihen (Stichproben) mit ungleicher Genauigkeit ergeben haben. Das kann der Fall sein, wenn z.B. die Größe x von verschiedenen Experimentatoren (evtl. in verschiedenen Laboratorien, mit unterschiedlichen Messmethoden) ermittelt wurde oder apparativ bedingte Unterschiede der Messunsicherheit über den untersuchten Messbereich vorliegen. Sollen derartige Daten zu einem Gesamtergebnis zusammengefasst werden, so ergibt eine analoge Vorgehensweise wie im vorausgegangenen Kap. 6.2.1 [in Gl. (6.2) wäre zu berücksichtigen, dass $\sigma_{x_1} \neq \sigma_{x_2} \neq \cdots \neq \sigma_{x_m}$ ist], den **gewogenen** (oder **gewichteten**) **Mittelwert** zu:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} p_i \bar{x}_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} p_i} . \tag{6.10}$$

Die Gewichte p_i sind dabei den Standardabweichungen der Mittelwerte $s_{\bar{x}_i}$, Gl. (6.8), der einzelnen Stichproben umgekehrt proportionale Größen:

$$p_i = \frac{1}{s_{\bar{x}_i}^2} . \tag{6.11}$$

Daraus folgt, dass ein Wert $\bar{x}_i$, der mit geringerer Genauigkeit als die anderen erhalten wurde, sehr viel weniger zum Endergebnis (6.10) beiträgt. Wurden alle Messwerte mit gleicher Genauigkeit erhalten, so dass $s_{\bar{x}_1} = s_{\bar{x}_2} = \cdots = s_{\bar{x}_m}$ gilt, sind die Gleichungen (6.8) und (6.10) identisch. Für die Berechnung der Standardabweichung des Mittelwertes (6.10) sind zwei Fälle zu unterscheiden:

(a) Sind keine unterschiedlichen systematischen Fehler in den einzelnen Messreihen vorhanden, d.h., ist der Satz der $\bar{x}_i$-Werte intern konsistent, lässt sich die Standardabweichung des Mittelwertes durch Anwendung der quadratischen Fehlerfortpflanzung (7.2) auf Gleichung (6.10) mit den Gewichten (6.11) leicht berechnen:

$$s_{\bar{\bar{x}},\mathrm{int}} = \sqrt{\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m} p_i}} . \tag{6.12}$$

Die Standardabweichung $s_{\bar{\bar{x}},\mathrm{int}}$ wird **innerer Fehler** genannt, da zu ihrer Größe die Messergebnisse $\bar{x}_i$ gar nicht beitragen.

(b) Sind unterschiedliche systematische Fehler in den einzelnen Messreihen nicht auszuschließen, kann die Standardabweichung entsprechend der Definition (6.7) erhalten werden:

$$s_{\bar{\bar{x}},\mathrm{ext}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} p_i (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2}{(m-1) \sum\limits_{i=1}^{m} p_i}} . \tag{6.13}$$

Die Gewichte p_i werden auch in diesem Falle nach Gl. (6.11) berechnet. Der sog. **äußere Fehler** (6.13) ist ein Maß für die externe Konsistenz, da er sich sowohl aus den Mittelwerten $\bar{x}_i$ als auch aus deren Standardabweichungen $s_{\bar{x}_i}$ berechnet. In der Praxis wird so vorgegangen, dass beide Standardabweichungen, Gl. (6.12) und Gl. (6.13), berechnet werden und der größere der beiden Werte zusammen mit dem gewogenen Mittelwert $\bar{\bar{x}}$ im Schlussresultat angegeben wird.

6.3 Abschätzen zufälliger Fehler

Ist es nicht möglich oder aber nicht sinnvoll (siehe Kap. 7.2.1 b, Kap. 6.2.2 und Kap. 7.2.3), für eine Messgröße x die Standardabweichung des Mittelwertes $s_{\bar{x}}$ zu berechnen, so ist der zufällige Fehler abzuschätzen.

Ein Eindruck von der Größe zufälliger **Einstell- und Ablesefehler** lässt sich gewinnen, wenn mehrere Beobachter unabhängig voneinander einstellen bzw. dieselbe Anzeige ablesen. Beim Ablesen von Skalen müssen die Bruchteile eines Teilungsstrichabstandes geschätzt werden (Interpolation). Die Sicherheit dieser Schätzung hängt von verschiedenen Faktoren ab, und zwar vom Teilungsstrichabstand, von der Teilungsstrich- und Zeigerbreite, vom Beobachter selbst und von den Versuchsbedingungen.

Bei Längenmessungen können i.A. folgende Ablesefehler angenommen werden:

$$\begin{aligned} \text{mm-Teilung:} &\quad \pm\, 0{,}2 \text{ mm bis } \pm\, 0{,}3 \text{ mm}, \\ \text{Messschieber:} &\quad \pm 0{,}05 \text{ mm}, \\ \text{Messschraube:} &\quad \pm 0{,}005 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Bei **Ziffernskalen** von Zählern und digital anzeigenden Messgeräten ist die Anzeigeunsicherheit 1 Einheit der letzten angezeigten Dezimalstelle.

Der zufällige Fehler einer einmaligen **Stoppuhrmessung** kann als Maximalfehler mit ± 0,1 s angenommen werden. Er hängt ab vom Beobachter und von der "Härte" der benutzten Stoppuhr. Es ist zu empfehlen, dass der Beobachter zuvor mit der betreffenden Uhr einen Vorversuch durchführt, indem er einen beliebigen, zeitlich gut definierten Vorgang 10mal misst und die Standardabweichung s_t nach Gleichung (6.7) berechnet. Diese bildet ein Maß für den zufälligen Fehler einer Einzelmessung, und zwar unabhängig von Dauer und Art der eigentlich zu messenden Vorgänge. Es sollte übrigens streng darauf geachtet werden, dass das Signal zum Ingangsetzen der Uhr dem Signal zum Anhalten gleichwertig ist, z.B. nicht einmal akustisch, das andere mal optisch ist oder optisch bei sehr unterschiedlichen Leuchtdichten erfolgt. Die zur Auslösung einer Reaktion erforderliche Einwirkungszeit eines Lichtreizes kann in Abhängigkeit von Leuchtdichte und Dunkeladaption des Auges zwischen 0,002 s und 0,125 s schwanken.

Ein Schätzwert für den zufälligen Fehler infolge **äußerer Einwirkungen auf das Messobjekt und die Messapparatur** oder infolge zeitlicher oder örtlicher Schwankungen der Messgröße wird erhalten, indem mit gleicher Sorgfalt eine kurze Reihe von Messungen durchgeführt (sofern möglich) und die Streuung der Werte untersucht wird.

Aus der Variationsbreite $(x_{\max} - x_{\min})$ einer Messgröße x kann ein **Näherungswert für die Standardabweichung des Mittelwertes** mit Hilfe der Gleichung

$$\frac{s_x}{\sqrt{n}} = \frac{k}{\sqrt{n}}(x_{\max} - x_{\min}) \tag{6.14}$$

gewonnen werden [6]. Dabei ist k ein von der Anzahl der Messwerte n abhängiger Faktor (siehe Tabelle 2). Der nach Gleichung (6.14) berechnete Wert weicht um so stärker von dem exakt berechneten Wert für die Standardabweichung des Mittelwertes, Gleichung (6.8), ab, je größer n ist. Für $n = 2$ stimmen beide Werte überein, für Messungen mit $n = 10$ ist die Näherung ausreichend, jedoch für $n > 30$ ist die Näherungsgleichung (6.14) nicht zu empfehlen.

Tabelle 2: Werte für den Faktor k zur Berechnung eines Näherungswertes für die Standardabweichung des Mittelwertes nach Gleichung (6.14)

n	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
k	0,380	0,360	0,340	0,330	0,310	0,305	0,300	0,290	0,284	0,280

n	15	20	25	30
k	0,275	0,260	0,250	0,240

7 Erfassung des Messfehlers einer nicht direkt messbaren Größe

Häufig ist die interessierende Größe, im folgenden mit F bezeichnet, nicht selbst messbar, sondern muss aus den direkt messbaren Größen $x, y, w, \ldots$ usw. berechnet werden. Die nicht direkt messbare Größe F sei also eine Funktion der direkt messbaren Größen, $F = f(x, y, w, \ldots)$. Zum Beispiel kann die Erdbeschleunigung g, als nicht direkt messbare Größe, mit Hilfe eines Fadenpendels durch Messung der Pendellänge l und der Zeit T für eine Schwingung aus der Beziehung

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

bestimmt werden, d.h. $g = f(l, T)$.

7.1 Mittelwert einer nicht direkt messbaren Größe

Der Mittelwert $\bar{F}$ der nicht direkt messbaren Größe F wird erhalten, indem in die zur Bestimmung von F bestehende Beziehung $F = f(x, y, w, \ldots)$ die nach Gl. (6.4) errechneten arithmetischen Mittelwerte $\bar{x}, \bar{y}, \bar{w}, \ldots$ der direkt messbaren Größen $x, y, w, \ldots$ eingesetzt werden, also:

$$\bar{F} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{w}, \ldots)\,. \tag{7.1}$$

Selbstverständlich können die Mittelwerte der direkt messbaren Größen auch aus Messwerten unterschiedlicher Genauigkeit hervorgegangen sein, d.h. nach Gl. (6.10) berechnet worden sein.

Beispiel: Zur Bestimmung der Erdbeschleunigung g wurden für die Länge l eines Fadenpendels und die Zeit t, die zur Ausführung von N Schwingungen benötigt wird, Messreihen mit n Werten aufgenommen. Es werden zunächst die Mittelwerte $\bar{l}$ und $\bar{t}$ bzw. $\bar{T} = \bar{t}/N$ berechnet, die anschließend verwendet werden, um aus der Beziehung

$$\bar{g} = \frac{4\pi^2 \bar{l}}{\bar{T}^2}$$

den Mittelwert g der nicht direkt messbaren Größe g zu erhalten.

7.2 Fehlerfortpflanzung

Herauszufinden, wie sich die ermittelten Messunsicherheiten $u_x, u_y, u_w, \ldots$ auf die Messunsicherheit u_F der nicht direkt messbaren Größe F auswirken, ist der Gegenstand der sogenannten Fehlerfortpflanzung. Diese wird im Folgenden für zwei unterschiedliche

Formen behandelt, die unter der Bezeichnung **quadratische** (oder Gaußsche) und **lineare** Fehlerfortpflanzung bekannt sind. Die entscheidende Frage, die vor Beginn der Fehlerrechnung geklärt werden muss, ist, welche Art der Fehlerfortpflanzung anzuwenden ist (Kap. 7.2.1 bis Kap. 7.2.3). Dies sollte noch besser vor der Messung geschehen, weil davon unter Umständen abhängt, ob eine Messgröße nur einmal (oder wenige Male) gemessen werden soll oder aber Messreihen mit $n \geq 10$ Messungen durchzuführen sind. Dafür sind die Angaben über Fehlergrenzen der benutzten Messgeräte und Maßverkörperungen sowie Informationen über sonstige systematische Fehler (wie z.B. Eigenschaftsänderungen des Messobjektes bei Änderung der Raumtemperatur oder des Luftdruckes) heranzuziehen. Der Einfluss der systematischen Fehler ist gegen den der zufälligen Fehler abzuwägen, wobei es zunächst genügt, letztere gemäß Kap. 6.3 abzuschätzen. Alle erhältlichen Angaben über Fehlergrenzen und sonstige systematische Fehler, alle Ergebnisse von Vorversuchen bezüglich der Einstell- und Ablesefehler oder der Streuung der Messwerte müssen im Messprotokoll festgehalten werden.

Sowohl das lineare als auch das quadratische Fehlerfortpflanzungsgesetz stellen Näherungen dar. Für ihre Anwendung muss vorausgesetzt werden, dass die **relativen Messunsicherheiten** der direkt messbaren Größen $\leq$ **10**% sind.

7.2.1 Fehlererfassung unter der Voraussetzung: zufällige Fehler $\geq$ systematische Fehler für alle Messgrößen

a) Messreihen seien für alle Messgrößen durchführbar
Unter diesen Voraussetzungen sind für die direkt messbaren Größen $x, y, w, \ldots$ die Standardabweichungen der Mittelwerte $s_{\bar{x}}, s_{\bar{y}}, s_{\bar{w}}, \ldots$ nach Gl. (6.8) zu berechnen, und für die systematischen Fehler sind Größtbeträge $|\Delta x_s|, |\Delta y_s|, |\Delta w_s|, \ldots$ entsprechend Kap. 2.2 abzuschätzen. Die Messunsicherheit u_F der nicht direkt messbaren Größe F wird mit Hilfe des **quadratischen Fehlerfortpflanzungsgesetzes** berechnet:

$$\begin{aligned} u_F &= \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x} u_x\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} u_y\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial w} u_w\right)^2 + \ldots}, \qquad (7.2) \\ \text{mit} \quad u_x &= |\Delta x_s| + \tau \cdot s_{\bar{x}}\,, \\ u_y &= |\Delta y_s| + \tau \cdot s_{\bar{y}}\,, \\ u_w &= |\Delta w_s| + \tau \cdot s_{\bar{w}}\,. \end{aligned}$$

Da in Gl. (7.2) die Messunsicherheiten $u_x, u_y, u_z, \ldots$ den Betrag der systematischen Fehler enthalten, lässt sich für das Vertrauensniveau der Messunsicherheit u_F der nicht direkt messbaren Größe $F = f(x, y, w, \ldots)$ keine Angabe machen.

Der Sonderfall, dass die **systematischen Fehler vernachlässigbar** sind, d.h. etwa $1/10$ oder weniger als $1/10$ des zufälligen Fehlers betragen, liegt z.B. bei gut durchkonstruierten kommerziellen Messapparaturen vor, vornehmlich mit mechanischer und optischer Wirkungsweise, so z.B. Theodolit, Refraktometer, Polarimeter, Spektrometer, Abbe-

Komparator. Insbesondere liegt der hier diskutierte Fall vor, wenn bei solidem Aufbau der Messapparatur das Einstellkriterium relativ unscharf ist. Das gilt z.B. auch für die Bildschärfe bei der Brennweitenbestimmung dünner Linsen oder das Tonminimum bei der Wechselstrombrücke. Für die Standardabweichung s_F einer nicht direkt messbaren Größe $F = f(x, y, w, \dots)$ reduziert sich Gl. (7.2) für den Spezialfall, dass die systematischen Fehler vernachlässigbar sind, auf die Formel:

$$s_F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x} s_x\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} s_y\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial w} s_w\right)^2 + \dots} \tag{7.3}$$

Bei Vernachlässigung der systematischen Fehler berechnet sich die Standardabweichung des Mittelwertes $s_{\bar{F}}$ des wahrscheinlichsten Wertes $\bar{F} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{w}, \dots)$ entsprechend Gl. (7.2) aus:

$$s_{\bar{F}} = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x} s_{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} s_{\bar{y}}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial w} s_{\bar{w}}\right)^2 + \dots} \tag{7.4}$$

Bei gleicher Anzahl der Einzelwerte in den einzelnen Messreihen und gleichem Vertrauensniveau der einzelnen Standardabweichungen $s_x, s_y, s_w, \dots$ in Gl. (7.3) bzw. Standardabweichungen der Mittelwerte $s_{\bar{x}}, s_{\bar{y}}, s_{\bar{w}}, \dots$ in Gl. (7.4) überträgt sich das gewählte Vertrauensniveau auf die Standardabweichung s_F bzw. auf die Standardabweichung des Mittelwertes $s_{\bar{F}}$ der nicht direkt messbaren Größe F.

b) Für einige Messgrößen seien keine Messreihen durchführbar
In diesem Falle sind für die betreffenden Messgrößen neben den systematischen auch die zufälligen Fehler abzuschätzen. Bleibt die eingangs gestellte Forderung, zufällige Fehler $\geq$ systematische Fehler für alle Messgrößen, erfüllt, wird die Messunsicherheit von F mit Hilfe der Gl. (7.2) berechnet, lediglich mit dem Unterschied, dass für die betreffenden Messgrößen die abgeschätzten Beträge der zufälligen Fehler an die Stelle der Vertrauensgrenzen treten. Für die resultierende Messunsicherheit ist in diesem Fall kein Vertrauensniveau angebbar.

7.2.2 Fehlererfassung unter der Voraussetzung: systematische Fehler > zufällige Fehler für alle Messgrößen

Liegt dieser Fall vor, wird das **lineare Fehlerfortpflanzungsgesetz** angewendet. Sowohl die systematischen als auch die zufälligen Fehler sind abzuschätzen. Die Messunsicherheit u_F der nicht direkt messbaren Größe $F = f(x, y, w, \dots)$ wird berechnet nach der

Beziehung

$$\begin{aligned} u_F &= \left|\frac{\partial F}{\partial x}u_x\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial y}u_y\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial w}u_w\right| + \ldots\,, \qquad (7.5)\\ \text{mit}\quad u_x &= |\Delta x_s| + |\Delta x_z|\,,\\ u_y &= |\Delta y_s| + |\Delta y_z|\,,\\ u_w &= |\Delta w_s| + |\Delta w_z|\,. \end{aligned}$$

Im folgenden soll noch der Sonderfall betrachtet werden, dass die **zufälligen Fehler vernachlässigbar** sind, d.h. etwa 1/10 oder weniger als 1/10 des systematischen Fehlers betragen. Solche Bedingungen liegen z.B. bei kalorischen Messungen vor. Der systematische Fehler ΔF_s der nicht direkt messbaren Größe $F = f(x, y, w, \ldots)$ berechnet sich entsprechend Gl. (7.5) nach der Formel:

$$u_F = \left|\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x_s\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y_s\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial w}\Delta w_s\right| + \ldots\,. \qquad (7.6)$$

Während in den Gleichungen (7.2) bis (7.4) angenommen wird, dass sich die Fehler der einzelnen Größen $x, y, w, \ldots$ teilweise kompensieren, ist in Gl. (7.5) und Gl. (7.6) der ungünstigste Fall zugrunde gelegt, nämlich der, dass sich alle Beiträge addieren.

Die Fehler $\Delta x_s, \Delta y_s, \Delta w_s, \ldots$ müssen voneinander unabhängig sein, was nicht mehr der Fall ist, wenn zwei oder mehrere der direkt messbaren Größen mit demselben Messinstrument gemessen werden. In einem solchen Falle lohnt sich eine besondere Betrachtung, da sich u.U. ein merklich kleinerer Fehler ergibt (siehe Aufgabe 9.2.4).

Sind die zufälligen Fehler einer Messgröße vernachlässigbar, ist es natürlich nicht sinnvoll, eine Messreihe aufzunehmen. Trotzdem sollte, um grobe Fehler zu vermeiden, 2- oder 3mal gemessen werden.

7.2.3 Fehlererfassung unter der Voraussetzung: Für einige der Messgrößen überwiegen die systematischen Fehler

In Kap. 7.1 wird vorausgesetzt, dass für jede der Messgrößen $x, y, w, \ldots$ der zufällige Fehler, entweder in der Form der Vertrauensgrenze oder aber als Schätzwert, vom abgeschätzten systematischen Fehler nicht übertroffen wird. Diese Voraussetzung werde nunmehr dahingehend abgeschwächt, dass sie nur noch für die Messgrößen x und y zutrifft. Für die Größe w sei dagegen der systematische Fehler größer als der zufällige. Die Frage, ob der Fehler von $F = f(x, y, w, \ldots)$ entsprechend dem quadratischen Fehlerfortpflanzungsgesetz, Kap. 7.1, oder aber nach dem linearen Fehlerfortpflanzungsgesetz, 7.2.2, zu berechnen ist, kann mit einer Abschätzung entschieden werden. Dazu wird die Messunsicherheit aller Größen mit Hilfe geschätzter zufälliger Fehler ausgedrückt (also $u_x = |\Delta x_s| + |\Delta x_z|, u_y = |\Delta y_s| + |\Delta y_z|, u_w = |\Delta w_s| + |\Delta w_z|$) und die Ungleichung

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}s_x\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}s_y\right)^2 \gtrless \left(\frac{\partial F}{\partial w}s_w\right)^2 \qquad (7.7)$$

untersucht. Gilt das Größerzeichen, überwiegen also im vorausgesetzten Falle die Beiträge der Messgrößen x und y, ist das quadratische Fehlerfortpflanzungsgesetz heranzuziehen, wobei Gl. (7.2) mit den Vertrauensgrenzen $\tau \cdot s_{\bar{x}}$ und $\tau \cdot s_{\bar{y}}$, sofern x und y aus Messreihen bestimmt werden konnten, und dem Schätzwert $|\Delta w_z|$ zu verwenden ist.

Gilt das Kleinerzeichen, wird die Messunsicherheit von F mit dem linearen Fehlerfortpflanzungsgesetz, Gl. ((7.5), berechnet, wobei die zufälligen Fehler ausschließlich durch die Schätzwerte $|\Delta x_z|$, $|\Delta y_z|$ und $|\Delta w_z|$ ausgedrückt werden. Für eventuelle weitere Messgrößen ist die Betrachtung sinngemäß zu erweitern.

8 Ausgleich von Messwerten durch eine Gerade (lineare Ausgleichsrechnung, lineare Regression)

In den vorangegangenen Kapiteln ist die statistische Analyse der Messdaten nur für den Fall behandelt worden, dass die Daten aus der wiederholten Messung ein und derselben Messgröße hervorgegangen sind - wie z.B. bei einem Versuch, in dem n wiederholte Messungen der Zeitdauer t von N Schwingungen eines Pendels mit einer Stoppuhr durchgeführt werden, welche die Messreihe $t_1, \ldots, t_n$ liefern. Häufig besteht jedoch die Aufgabe des Experimentes darin, n Wertepaare $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ unterschiedlicher physikalischer Größen x und y, die in einer funktionalen Abhängigkeit zueinander stehen, zu messen. Dabei wird i.A. die von dem eingestellten Wert x_i abhängige Größe y_i für jeden Punkt $i = 1, \ldots, n$ nur einmal gemessen. Beispielsweise kann dieses Messverfahren in einem Experiment Anwendung finden, das die Bestimmung der Konstanten k einer Feder durch Messung ihrer Ausdehnung l in Abhängigkeit von einer angreifenden Kraft $F = m \cdot g$ zum Ziel hat. Da für kleine Ausdehnungen entsprechend dem Hookschen Gesetz $mg = k\,(l - l_0)$ gilt (l_0 ist der Anfangswert der Federausdehnung ohne Belastung mit einem Massestück m_i), werden zweckmäßigerweise Wertepaare $(m_1, l_1), \ldots, (m_n, l_n)$ gemessen. Aus dem Anstieg g/k der Geraden $l = (g/k) \cdot m + l_0$, welche die Messpunkte am besten ausgleicht, kann die Federkonstante k erhalten werden.

Für die nachfolgenden Betrachtungen wird vorausgesetzt, dass die Genauigkeit, mit der die Messwerte y_i gemessen werden, für alle y_i gleich groß ist. Die zufälligen Fehler der eingestellten Werte x_i sollen vernachlässigbar klein sein. Unterschiedliche systematische Fehler sowohl in den Größen y_i als auch in den x_i sind auszuschließen; immer auftretende, gemeinsame systematische Fehler können dagegen evtl. nur zu Verschiebungen des gesuchten Parameters führen oder ganz ohne Einfluss sein. Für viele Experimente sind diese Annahmen gerechtfertigt. Treffen die Voraussetzungen nicht zu, sind unterschiedliche Gewichte zu berücksichtigen bzw. Fehlergleichungen zu verwenden, die so formuliert sind, dass die Abweichungen parallel zur x-Koordinate oder die parallel zu beiden Koordinaten vorhandenen Fehler ausgeglichen werden. Zur Behandlung dieser Problematik, für deren Verständnis die Kenntnis der hier betrachteten Fälle ausreichend ist, wird auf die Monographie [5] verwiesen.

8.1 Lineare Abhängigkeit $y = a \cdot x + b$

Ist bei einem Experiment bekannt, dass ein linearer Zusammenhang

$$y = a\,x + b \tag{8.1}$$

zwischen den Messgrößen y und x besteht, und gelänge es, die Messungen ohne irgendwelche Messfehler auszuführen, läge jeder der Punkte $P_i(x_i, y_i)$ exakt auf der Geraden, und es gilt:

$$y_i - ax_i - b = 0\,. \tag{8.2}$$

In der Praxis sind die Messwerte y_i mit Messfehlern behaftet, so daß für Gl. (8.2) geschrieben werden muss:

$$y_i - ax_i - b = \delta y_i\,. \tag{8.3}$$

Die Aufgabe besteht nun darin, die Konstanten a und b auf der Grundlage der Messdaten $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ so zu bestimmen, dass die Gerade die Messwerte bestmöglich ausgleicht. Das analytische Verfahren zur Lösung dieses Problems wird als Gaußsche **Methode der kleinsten Quadrate** oder auch als **lineare Regression** bezeichnet (engl.: least-squares fitting technique; regression analysis). Die beste Gerade wird bei dieser Methode gerade dann erhalten, wenn die Summe der Quadrate aller Abweichungen δy_i in Gl. (8.3) ein Minimum wird. Das bedeutet, dass die Bedingung

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2 = \text{Min} \tag{8.4}$$

erfüllt werden muss. Die Forderung Gl. (8.4) resultiert aus der Anwendung des Prinzips der größten Wahrscheinlichkeit (vergleiche Kap. 6.2.1).

Werden die partiellen Ableitungen der Funktion $f(a,b)$, $\partial f/\partial a$ und $\partial f/\partial b$, gleich Null gesetzt (notwendige Bedingung für einen Extremwert), ergeben sich die sogenannten Normalgleichungen

$$a \sum x_i^2 + b \sum x_i = \sum x_i y_i\,, \tag{8.5}$$

$$a \sum x_i + nb = \sum y_i\,. \tag{8.6}$$

Auf die Angabe der Grenzen $i = 1$ bis n an den Summenzeichen $\sum$ wird im folgenden zur besseren Übersicht verzichtet. Die gesuchten Bestwerte a^* und b^* für die Konstanten a und b ergeben sich nach

$$a^* = \frac{n\,(\sum x_i\, y_i) - (\sum x_i)\,(\sum y_i)}{n\,(\sum x_i{}^2) - (\sum x_i)^2}\,, \tag{8.7}$$

$$b^* = \frac{\left(\sum x_i^2\right)(\sum y_i) - (\sum x_i)\,(\sum x_i\, y_i)}{n\left(\sum x_i^2\right) - (\sum x_i)^2}\,. \tag{8.8}$$

Aus Gl. (8.6) folgt unmittelbar die interessante Folgerung

$$\bar{y} = a^* \bar{x} + b^* \tag{8.9}$$

wobei $\bar{x} = (1/n) \sum x_i$ und $\bar{y} = (1/n) \sum y_i$ die arithmetischen Mittelwerte der Messdaten $x_1, \ldots, x_n$ bzw. $y_1, \ldots, y_n$ sind. Das bedeutet, dass der Punkt $P(\bar{x}, \bar{y})$ ein Wert der

Ausgleichsgeraden ist – ein Ergebnis, das nützlich angewendet werden kann, wenn die Messwerte $y_1, \ldots, y_n$ grafisch ausgeglichen werden sollen.

Um die Güte des Geradenausgleichs beurteilen zu können, werden die Standardabweichungen s_{a^*} und s_{b^*} der Parameter a^* und b^* berechnet. Für die Standardabweichungen $s_{y_1} = s_{y_1} = \cdots = s_{y_n} = s_y$ der einzelnen Messwerte $y_1, \ldots, y_n$ ist ein guter Schätzwert (vergleiche Kap. 6.2.1, Gl. (6.7)) durch den Ausdruck

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - a^* x_i - b^*)^2} \tag{8.10}$$

gegeben. Die Größe $n - 2$ im Nenner von Gl. (8.10), statt $n - 1$ in Gl. (6.7)), ergibt sich aus der Notwendigkeit, dass zwei Messwertpaare (x_i, y_i) erforderlich sind, um die beiden Konstanten a^* und b^* zu bestimmen, folglich $n - 2$ Messwertpaare überzählig sind; d.h. die Zahl der Freiheitsgrade ist $\nu = n - 2$.

Da a^* und b^* als nicht direkt messbare Größen aus den Messwerten $y_1, \ldots, y_n$ mit Hilfe von Gln. (8.7) und (8.8) errechnet werden, können ihre Standardabweichungen durch Anwendung der quadratischen Fehlerfortpflanzung erhalten werden:

$$s_{a^*} = s_y \sqrt{\frac{n}{n\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2}}, \tag{8.11}$$

$$s_{b^*} = s_y \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2}}. \tag{8.12}$$

8.2 y proportional zu x

Kann aus der Kenntnis des physikalischen Sachverhaltes eine Abhängigkeit zwischen den physikalischen Größen y und x der Form

$$y = a\,x \tag{8.13}$$

angenommen werden, so wird die Konstante a^* der Geraden, welche die mit den Abweichungen $y_i - a\,x_i = \delta y_i$ behafteten Messwerte y_i am besten ausgleicht, aus der Bedingung erhalten:

$$f(a) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a x_i)^2 = \text{Min}\,. \tag{8.14}$$

Mit der Extremwertbedingung $\mathrm{d}f/\mathrm{d}a = 0$ ergibt sich auf einfache Weise

$$a^* = \frac{\sum x_i\, y_i}{\sum x_i{}^2}\,. \tag{8.15}$$

Die Standardabweichung s_y der einzelnen Messwerte y_i ist analog zu Gl. (8.10) definiert durch

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - a^* x_i)^2} \tag{8.16}$$

Der Ersatz von $n-2$ durch $n-1$ in Gl. (8.16), verglichen mit Gl. (8.10), ist dadurch begründet, dass prinzipiell nur ein Messwertpaar (x_i, y_i) erforderlich ist, um für den behandelten Sonderfall die Konstante a^* zu bestimmen; die Zahl der Freiheitsgrade ist $\nu = n-1$. Durch Anwendung der quadratischen Fehlerfortpflanzung, Gl. (7.3), auf Gl. (8.15) wird die Standardabweichung s_{a^*} der Konstanten a^* erhalten

$$s_{a^*} = \frac{s_y}{\sqrt{\sum x_i^2}} . \tag{8.17}$$

8.3 Lineare Abhängigkeit $y = a \cdot x + b$, mit $a = \pm 1$

Für den Sonderfall, dass zwischen zwei physikalischen Größen ein linearer Zusammenhang $y = x + b$ bzw. $y = -x + b$ besteht, liefert die Normalgleichung (8.6) unmittelbar das einfache Ergebnis, dass die Konstante b^* der Ausgleichsgeraden aus der Differenz (für $a = +1$) bzw. der Summe (für $a = -1$) der Mittelwerte der Messwerte y_i und der eingestellten Werte x_i zu berechnen ist

$$b^* = \frac{1}{n}\sum y_i \mp \frac{1}{n}\sum x_i = \bar{y} \mp \bar{x} \quad \text{für} \quad a = \pm 1 . \tag{8.18}$$

Die Standardabweichung s_{b^*} der Konstanten b^* ist

$$s_{b^*} = \frac{s_y}{\sqrt{n}} , \tag{8.19}$$

wobei s_y die Standardabweichung der einzelnen Messpunkte y_i darstellt

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (y_i \mp x_i - b^*)^2} \quad \text{für} \quad a = \pm 1 . \tag{8.20}$$

Die Zahl der Freiheitsgrade ist $\nu = n - 1$, da nur ein Messwertpaar erforderlich ist, um die Verschiebung b^* zu bestimmen.

8.4 Linearisierte Zusammenhänge

Einige Funktionen können in einfacher Weise so transformiert werden, dass sie als lineare Funktionen behandelt werden können. In der Physik sind die wichtigsten dieser Beziehungen die Exponentialfunktion und die Potenzfunktion.

Exponentialfunktion

Wird der Zusammenhang zwischen den physikalischen Größen y und x durch die Funktion

$$y = b\, e^{ax} , \tag{8.21}$$

beschrieben (a und b sind Konstanten), wird eine lineare Beziehung zwischen $\ln y$ und x erhalten, wenn beide Seiten der Gleichung logarithmiert werden

$$\ln y \quad = a\, x + \ln b\,. \tag{8.22}$$

Die mit Messfehlern behafteten, in Abhängigkeit von den eingestellten Werten $x_1, \ldots, x_n$, gemessenen Werte $y_1, \ldots, y_n$ lassen sich mit Hilfe der Gln. (8.22) ausgleichen, wobei y_i durch $\ln y_i$ zu ersetzen ist und b^* durch $\ln b^*$. Im Falle, dass $b = 1$ gilt, ist Gl. (8.13) mit den entsprechenden Substitutionen zu verwenden.
Beispiel: Die Spannung U an einem Kondensator mit der Kapazität C fällt bei der Entladung des Kondensators über einen Entladewiderstand R in Abhängigkeit von der Zeit t exponentiell ab. Zwischen U und t besteht die Beziehung

$$U = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{bzw.} \quad \ln U = -\frac{1}{RC} \cdot t + \ln U_0\,. \tag{8.23}$$

Die mit Messfehlern behafteten, in Abhängigkeit von den Zeiten $t_1, \ldots, t_n$, gemessenen Werte $U_1, \ldots, U_n$ können durch Anwendung der Gln. (8.3) ausgeglichen werden, wobei x_i durch t_i zu ersetzen ist, y_i durch $\ln U_i$ und b durch $\ln U_0$. Die Ausgleichsgerade hat die Konstanten $a^* = 1/(RC)$ und $b^* = \ln U_0$ (U_0 ist der Anfangswert der Spannung zur Zeit $t = 0$, der nicht explizit gemessen werden muss!). Ist die Kapazität C des Kondensators bekannt, wird die Größe des unbekannten (hohen) Widerstandes aus $R = 1/(a * C)$ erhalten.

Potenzfunktion
Auch bei der Potenzfunktion,

$$y \quad = \quad b\, x^a\,, \tag{8.24}$$

kann es zweckmäßig sein, sie logarithmisch darzustellen

$$\lg y \quad = a\, \lg x + \lg b\,. \tag{8.25}$$

In den Gln. (8.3) sind in diesem Fall y_i durch $\lg y_i$, x_i durch $\lg x_i$ und b durch $\lg b$ zu ersetzen, um die gemessenen Werte $y_1, \ldots, y_n$ auszugleichen. Für $b = 1$ ist Gl. 8.13) mit den entsprechenden Substitutionen zu verwenden.
Beispiel: Um die Erdbeschleunigung g mit Hilfe eines Fadenpendels zu bestimmen, können die zu verschiedenen eingestellten Pendellängen l_i gehörenden Schwingungsdauern T_i bestimmt werden. Die Transformation der zwischen l und T geltenden Beziehung

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{ergibt} \quad \lg T = \frac{1}{2}\lg l + \lg\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\,. \tag{8.26}$$

Der Ausgleich der Werte T_i erfolgt, indem y_i durch $\lg T_i$ ersetzt wird, x_i durch $\lg l_i$ und b durch $\lg b$. Die Erdbeschleunigung wird aus $g = (2\pi/b^*)^2$ erhalten.

Da mit der Transformation der Messwerte y_i auch ihre Messfehler transformiert wurden, muss die beschriebene Methode auf kleine Messfehler beschränkt bleiben. Gegebenenfalls sind geeignete Gewichte in die Bedingung (8.4) einzuführen (siehe [3]). Im Falle logarithmischer Transformation ist die Anwendung exakt, wenn die relativen Messfehler der Messwerte gleich sind.

8.5 Linearer Korrelationskoeffizient

Bisher wurde die Problemstellung behandelt, wie die Konstanten der Ausgleichsgeraden zu bestimmen sind, wenn vorausgesetzt wird, dass der Zusammenhang zwischen x und y linear ist. Es kann aber auch gefragt werden, ob die Messwerte $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ die Erwartung einer linearen Abhängigkeit erfüllen, d.h., es wird zuerst die Ausgleichsgerade zu den gegebenen Messpunkten bestimmt, und anschließend wird ein Maß dafür gesucht, wie gut diese Gerade die Hypothese einer linearen Abhängigkeit zwischen x und y stützt. Das gesuchte quantitative Maß für den Grad des linearen Zusammenhangs ist gegeben durch den linearen Korrelationskoeffizienten

$$\begin{aligned} r &= \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2 \sum(y_i - \bar{y})^2}}\,, \\ -1 &\leq r \leq +1\,. \end{aligned} \tag{8.27}$$

Für $r = \pm 1$ liegen die Punkte $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ exakt auf einer Geraden, wobei das Vorzeichen für r durch den Anstieg der Geraden bestimmt wird. Ist dagegen $r = 0$, sind die Punkte unkorreliert.

9 Aufgaben mit Lösungen

9.1 Ermittlung des Messunsicherheit einer direkt messbaren Größe

Der Durchmesser d eines Drahtes wird mit einer Messschraube an verschiedenen Stellen insgesamt $n = 10$mal gemessen:

d/mm	1,038	1,020	1,025	1,044	1,032	1,030	1,050	1,033	1,036	1,042

Mittelwert $\bar{d}$ und Standardabweichung s_d werden zweckmäßigerweise mit einem Taschenrechner berechnet, der über statistische Funktionen verfügt (Taste für die Standardabweichung der Stichprobe i.a. mit σ_{n-1} bezeichnet). Der Mittelwert ist

$$\bar{d} = \sum_{i=1}^{10} d_i = 1{,}0350\,\text{mm}\,.$$

Die Stichproben-Standardabweichung ist

$$s_d = 9{,}0 \cdot 10^{-3}\,\text{mm}\,.$$

Für ein 95%-Vertrauensniveau ist die Vertauensgrenze

$$\tau s_{\bar{d}} = \tau \frac{s_d}{\sqrt{n}} = 2{,}262 \frac{9{,}0 \cdot 10^{-3}\,\text{mm}}{\sqrt{10}} = 0{,}0064\,\text{mm}\,.$$

Der systematische Fehler der Messschraube ist

$$\begin{aligned}\Delta d_s &= \pm(0{,}005\,\text{mm} + 10^{-5} \cdot \bar{d}) \\ &= \pm(0{,}005\,\text{mm} + 10^{-5} \cdot 1{,}0350\,\text{mm}) \approx \pm 0{,}005\,\text{mm}\,.\end{aligned}$$

Die Messunsicherheit des Drahtdurchmessers d ist somit

$$u_d = |\Delta d_s| + \tau s_{\bar{d}} \;=\; (0{,}005 + 0{,}0064)\,\text{mm} = \pm 0{,}0114\,\text{mm}\,.$$

Das Schlussergebnis wird in folgender Form angegeben

$$d = (1{,}035 \pm 0{,}012)\text{mm} \qquad \text{bzw.} \qquad A = 1{,}035\,(1 \pm 1{,}2\%)\text{mm}\,,$$

9.2 Ermittlung des Messunsicherheit nicht direkt messbarer Größen

9.2.1 Systematische Fehler sind vernachlässigbar

Die Fläche A eines kreisringförmigen Bleches soll bestimmt werden. Mit Hilfe eines Abbeschen Komparators werden innerer und äußerer Durchmesser, $d = 2r$ bzw. $D = 2R$, in verschiedenen Richtungen und insgesamt je 20mal gemessen. Angenommen, die beiden

Radien werden zu $r = (24{,}035 \pm 0{,}029)$mm und $R = (52{,}260 \pm 0{,}025)$mm ermittelt, wobei ein 95%-Vertrauensniveau zu Grunde gelegt sei.

Was lässt sich über die Messunsicherheit der Kreisfläche $A = \pi(R^2 - r^2) = 6765{,}19\text{mm}^2$ aussagen?

Lösung: Der systematische Fehler des Komparators ist wesentlich kleiner als der zufällige Fehler, den der Beobachter beim Einstellen auf den im Mikroskop nicht völlig glatt und scharf erscheinenden Rand begeht. Das Messobjekt weise keine systematischen Fehler, wie z.B. eine Unrundheit, auf. Die zufälligen Fehler überwiegen also. Daher ist die quadratische Fehlerfortpflanzung anzuwenden.

Die Standardabweichung des Mittelwertes der Fläche $A = f(R, r)$ ist

$$s_{\bar{A}} = \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial R} s_{\bar{R}}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial r} s_{\bar{r}}\right)^2} = \sqrt{(2R\pi s_{\bar{R}})^2 + (2r\pi s_{\bar{r}})^2}\,,$$

und somit ist

$$\tau s_{\bar{A}} = 2\pi\sqrt{(R\,\tau s_{\bar{R}})^2 + (r\,\tau s_{\bar{r}})^2}\,,$$

mit $\tau s_{\bar{R}} = 0{,}025$mm und $\tau s_{\bar{r}} = 0{,}029$mm.

Es folgt demnach

$$\tau s_{\bar{A}} = 6{,}28\sqrt{(1{,}31\text{mm}^2)^2 + (0{,}70\text{mm}^2)^2} = 9{,}3\text{mm}^2\,.$$

Das Schlussergebnis ist nach Rundung

$$A = (6765 \pm 10)\text{mm}^2 \qquad \text{bzw.} \qquad A = 6765\,(1 \pm 0{,}15\%)\text{mm}^2\,,$$

wobei das eingangs angegebene 95%-Vertrauensniveau erhalten bleibt.

9.2.2 Systematische Fehler überwiegen in allen Messgrößen

Einem Wasserbad soll eine definierte elektrische Arbeit W dadurch zugeführt werden, dass ein konstanter Strom I für die Zeitdauer t durch den in das Wasser eintauchenden Widerstand R fließt. Was ist über die Messunsicherheit u_W auszusagen, wenn
der Strom $I = 4{,}5$ A mit einem Messinstrument der Klasse 1,5 mit Endausschlag von 5A gemessen wird,
die Zeit $t = 6{,}0$ min mit einer Stoppuhr, deren Zeiger in 30s umläuft, einmal gemessen wird (der Gangfehler der Stoppuhr werde mit $5 \cdot 10^{-3} \cdot t$ angenommen),
und der Widerstand $R = 5{,}2\,\Omega$ zuvor mit einem Größtfehler von 0,2% bestimmt wurde?

Lösung: Ein Messinstrument der Klasse 1,5 mit einem Endausschlag von 5A hat eine Fehlergrenze von $\pm 5\,\text{A} \cdot 0{,}015 = \pm 0{,}075$ A. Das bedeutet, dass der Strom $I = 4{,}5$ A mit einem relativen systematischen Fehler von $\Delta I_s / I = \pm 1{,}7\%$ gemessen wurde. Das Messinstrument besitzt eine Spiegelskala mit 50 Skalenteilen; ein Skalenteil entspricht also 0,1

A. Da der zufällige Ablesefehler höchstens 0,3 Skalenteile beträgt, kann der Strom mit einem relativen Größtfehler von $\Delta I_z / I = \pm 0{,}03/4{,}5 = \pm 0{,}7\%$ abgelesen werden. Dieser Fehler ist zwar nicht vernachlässigbar, ist aber um die Hälfte kleiner als der systematische Fehler. Die relative Messunsicherheit von I beträgt $\Delta u_I / I = 1{,}7\% + 0{,}7\% = 2{,}4\%$.

Bei der Zeitmessung beträgt der systematische Fehler $\Delta t_s / t = \pm(0{,}2\mathrm{s} + 5 \cdot 10^{-3} \cdot 360\mathrm{s}) / 360\mathrm{s} = \pm 0{,}6\%$. Bei einmaliger Messung kann der zufällige Fehler mit $\pm 0{,}1$ s angenommen werden, so dass der relative Fehler $\Delta t_z / t = \pm 0{,}03\%$ beträgt und somit sogar vernachlässigbar ist.

Wenn beim Widerstand überhaupt von einem zufälligen Fehleranteil gesprochen werden kann (z.B. wechselnde Übergangswiderstände), dann ist er sicherlich klein gegen den systematischen Fehleranteil.

Es liegt demnach der Fall vor, dass in allen Messgrößen die systematischen Fehler überwiegen. Daher ist das lineare Fehlerfortpflanzungsgesetz anzuwenden. Die elektrische Arbeit ist bestimmt durch $W = I^2 R t$. Die Messunsicherheit von W ist

$$u_W = \left| \frac{\partial W}{\partial I} u_I \right| + \left| \frac{\partial W}{\partial R} u_R \right| + \left| \frac{\partial W}{\partial t} u_t \right| .$$

Nach Ausführung der Differentiation folgt

$$u_W = |2IRt\, u_I| + \left| I^2 t\, \Delta R_s \right| + \left| I^2 R\, \Delta t_s \right| .$$

Günstiger ist es hier, den relativen Fehler zu berechnen, wozu durch $W = I^2 R t$ zu dividieren ist,

$$\frac{u_W}{W} = 2 \left| \frac{u_I}{I} \right| + \left| \frac{\Delta R_s}{R} \right| + \left| \frac{\Delta t_s}{t} \right| .$$

Mit den obigen Zahlenwerten folgt für den relativen Fehler

$$\frac{u_W}{W} = 2 \cdot 2{,}4\% + 0{,}2\% + 0{,}6\% = 5{,}6\% \approx 6\% .$$

Das Schlussergebnis ist

$$W = 37{,}9\,(1 \pm 6\%)\mathrm{Ws} \qquad \text{bzw.} \qquad W = (37{,}9 \pm 2{,}2)\mathrm{Ws} .$$

9.2.3 Für einige Messgrößen überwiegen die systematische Fehler

1. Beispiel: Widerstandsmessung mit Wheatstone-Brücke

Mit einer Wheatstone-Brücke soll ein unbekannter Widerstand R gemessen werden. Der Vergleichswiderstand sei $R_0 = 1008\,\Omega$, mit einer Garantiefehlergrenze von $\pm 0{,}3\%$. Zufällige Fehler des Vergleichswiderstandes, wie z.B. zeitlich veränderliche Kontaktwiderstände, seien vernachlässigbar.

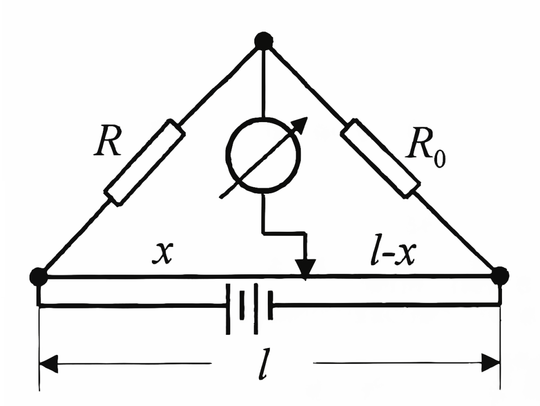

Abbildung 1: Wheatstone-Brücke.

Beim sogenannten Brückenabgleich wird ein Schleifkontakt auf einem Draht der Länge l solange verschoben, bis der Nullindikator in der Brückendiagonale Stromlosigkeit bzw. die Potentialgleichheit anzeigt. Es gilt dann

$$\frac{R}{R_0} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{x}{l-x},$$

wobei x die Position des Schleifkontaktes bezeichnet.

Die gesamte Länge des Drahtes sei $l = 800{,}0 \pm 0{,}3\,\mathrm{mm}$. Die angegebene Messunsicherheit ergibt sich aus dem Größtfehler des Stahlmaßes, $\pm(0{,}05\,\mathrm{mm} + 5 \cdot 10^{-5} \cdot 800\,\mathrm{mm})$, und einer Zugabe, welche die Kantenabrundung der beiden Einspannungen berücksichtigt ($\approx \pm 0{,}1$ mm für jede Kante).

Der Abgleich der Brücke wird 10mal vorgenommen:

x/mm	427,4	427,2	426,4	427,6	427,1	426,8	427,2	428,0	427,0	427,3

Der Mittelwert beträgt $\bar{x} = 427{,}2\,\mathrm{mm}$, die Standardabweichung ist $s_d = 0{,}435\,\mathrm{mm}$.

Damit folgt

$$\begin{aligned} R &= R_0 \frac{x}{l-x} \\ &= 1008\,\Omega \frac{427{,}2}{800{,}0 - 427{,}2} = 1155{,}09\,\Omega\,, \end{aligned}$$

Die Messunsicherheiten in R_0 und l sind – wie oben erwähnt – durch systematische Fehler bestimmt. Der zufällige Fehler von x ist gegeben durch die Vertrauensgrenze

$$\tau s_{\bar{x}} = 2{,}262 \frac{0{,}435\,\mathrm{mm}}{\sqrt{10}} = 0{,}31\,\mathrm{mm}\,.$$

Der systematische Fehler von x ist bei Ablesung auf einem Stahlmaß $\Delta x_s = \pm 0{,}071\,\mathrm{mm}$ und damit kleiner als der auf der Ungenauigkeit des Abgleichs beruhende zufällige Fehler. Die relative Messunsicherheit in x beträgt

$$\frac{u_x}{x} = \frac{|\Delta x_s| + \tau s_{\bar{x}}}{x} = \frac{0{,}071 + 0{,}31}{427{,}2} \approx 0{,}09\%\,.$$

Es ist nun zu entscheiden, welche Art der Fehlerfortpflanzung anzuwenden ist. Dazu sind die einzelnen Beiträge zu untersuchen

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial R}{\partial R_0} u_{R_0}\right)^2 &= \left(\frac{x}{l-x} u_{R_0}\right)^2 = \left(R \frac{u_{R_0}}{R_0}\right)^2 = (0{,}003)^2\, R^2\,, \\
\left(\frac{\partial R}{\partial l} u_l\right)^2 &= \left(-\frac{R_0 x}{(l-x)^2} u_l\right)^2 = \left(-R \frac{l}{l-x} \frac{u_l}{l}\right)^2 = (0{,}0008)^2\, R^2\,, \\
\left(\frac{\partial R}{\partial x} u_x\right)^2 &= \left(\frac{R_0 l}{(l-x)^2} u_x\right)^2 = \left(R \frac{l}{l-x} \frac{u_x}{x}\right)^2 = (0{,}0019)^2\, R^2\,.
\end{aligned}$$

Ein Vergleich zeigt, dass der erste Term, verursacht durch den systematischen Fehler von R_0, den größten Beitrag liefert. Somit ist die lineare Fehlerfortpflanzung anzuwenden. Die relative Messunsicherheit von R ist

$$\begin{aligned}
\frac{u_R}{R} &= \left|\frac{u_{R_0}}{R_0}\right| + \left|-\frac{l}{l-x} \frac{u_l}{l}\right| + \left|\frac{l}{l-x} \frac{u_x}{x}\right| \\
&= 0{,}003 + \frac{0{,}3\text{mm}}{372{,}8\text{mm}} + \frac{800\text{mm}}{372{,}8\text{mm}} \cdot 0{,}0009 \\
&= 3 \cdot 10^{-3} + 0{,}8 \cdot 10^{-3} + 1{,}9 \cdot 10^{-3} = 5{,}7 \cdot 10^{-3}\,.
\end{aligned}$$

Das Ergebnis ist

$$\underline{\underline{R = 1155\,(1 \pm 0{,}6\%)\,\Omega}} \qquad \text{bzw.} \qquad \underline{\underline{R = (1155 \pm 7)\,\Omega}}\,.$$

2. Beispiel: Fadenpendel

Zur Bestimmung der Erdbeschleunigung g mit einem Fadenpendel der Länge l soll die Schwingungszeit T aus der Zeitdauer t von 100 Schwingungen ermittelt werden. Welches Fehlerfortpflanzungsgesetz ist anzuwenden, wenn die Länge $l \approx 69$ cm mit einem Stahlmaß gemessen wird und wenn eine Stoppuhr mit 30 s Umlaufdauer verwendet wird? Inwieweit sind Messreihen erforderlich?

Lösung: Die Fehlergrenzen des Stahlmaßstabes[5] sind gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\Delta l_s &= \pm(0{,}05\text{mm} + 5 \cdot 10^{-5} \cdot 690\text{mm}) \\
&= \pm(0{,}05\text{mm} + 0{,}035\text{mm}) \\
&= \pm 0{,}085\text{mm}\,.
\end{aligned}$$

Ein weiterer nicht zu vernachlässigender Fehler kommt dadurch zustande, dass wegen der unvermeidbaren Kantenabrundung der oberen Einspannung nicht ganz klar ist, ab welcher Stelle die Pendellänge l eigentlich zu rechnen ist. Durch Aufbohren der Kugel

[5] Für einen Stahlmaßstab nach DIN 866A; für Klasse EG II wäre die Fehlergrenze größer: $b = 5 \cdot 10^{-4}$ (T.B.).

und das Einlöten des Drahtes kann sich der Schwerpunkt aus dem Kugelmittelpunkt verlagert haben. Daher wird der systematische Fehler der Längen messung insgesamt zu

$$\Delta l_s = \pm 0{,}3\text{mm}$$

geschätzt.

Einmalige Ablesung vorausgesetzt, kann der zufällige Fehler mit $\Delta l_z = \pm 0{,}2\text{mm}$ angenommen werden. Die Messunsicherheit $u_l = \Delta l_s + \Delta l_z$ ist also

$$u_l = \pm 0{,}5\text{mm} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{u_l}{l} = 0{,}00072\,.$$

Die Fehlergrenze der benutzten Stoppuhr ist

$$\Delta t_s = \pm(0{,}2\,\text{s} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot t)\,.$$

Das erste Glied in der Klammer berücksichtigt das Springen des Zeigers sowie die Tatsache, dass sich die Teilungsfehler der einzelnen Zahnräder im ungünstigsten Fall alle addieren können. Wird eine Messreihe aufgenommen, so ist weder anzunehmen, dass dieser ungünstigste Fall immer eintritt, noch, dass dem ersten Glied der Klammer stets das gleiche Vorzeichen zukommt. Die genannten Fehlerursachen werden bei einer Messreihe daher eine größere Streuung der einzelnen Messwerte bewirken. Als systematischer Fehler ist dann lediglich der Gangfehler – beschrieben durch den zweiten Summanden – zu berücksichtigen.

Im vorliegenden Fall ist t das 100fache der Schwingungsdauer T, die nach Gleichung $T = \pi\sqrt{l/g}$ für ein 69 cm langes Pendel etwa 1,67 s beträgt. Somit ist

$$\Delta t_s = \pm(0{,}2 + 0{,}0835)\,\text{s} = \pm(0{,}284)\,\text{s}\,,$$

und folglich

$$\Delta T_s = \pm(0{,}00284)\,\text{s}\,.$$

Wird t nur einmal gemessen, so darf der zufällige Fehler beim Stoppen wegen schwankender Reaktionszeiten zu $\Delta t_z = \pm(0{,}1)$ s angenommen werden. Das ergibt bei 100 gemessenen Schwingungen einen zufälligen Fehler der Schwingungsdauer T von $\Delta T_z = \pm 0{,}001$ s. Bei einmaliger Messung wäre die Messunsicherheit also gegeben durch

$$u_T = 0{,}00284\,\text{s} + 0{,}001\,\text{s} = 0{,}00384\,\text{s} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{u_T}{T} = 0{,}0023\,.$$

Die Erdbeschleunigung g wird aus $g = 4\pi^2 l/T^2$ berechnet. Vorausgesetzt, es wäre die quadratische Fehlerfortpflanzung

$$\frac{u_g}{g} = \sqrt{\left(\frac{u_l}{l}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{u_T}{T}\right)^2}$$

anzuwenden, ergäbe sich bei einmaliger Zeitmessung

$$\begin{aligned} \frac{u_g}{g} &= \sqrt{(0{,}00072)^2 + (2 \cdot 0{,}0023)^2} \\ &= 10^{-4}\sqrt{(7{,}2)^2 + (46)^2} \\ &= 10^{-4}\sqrt{52 + 2116}\,. \end{aligned}$$

Die Betrachtung des Radikanden zeigt, dass die Längenmessung nur sehr wenig zur Messunsicherheit beiträgt. Daher genügt eine einmalige Längenmessung. Die Genauigkeit der Zeitmessung muss dadurch gesteigert werden, dass eine Messreihe aufgenommen wird.

Bei der endgültigen Durchführung des Experimentes seien die folgenden Messergebnisse erreicht worden:

$$l = (692{,}4 \pm 0{,}5)\mathrm{mm}\,,$$

während bei der Messung von je 100 Schwingungen für die Schwingungsdauer folgende Messreihe zustande kam

T/s	1,667	1,668	1,669	1,667	1,670	1,669	1,672	1,668	1,669	1,671

mit dem Mittelwert $\bar{T} = 1{,}6690$ s und der Stichproben-Standardabweichung $s_T = 0{,}00163$ s. Für ein 95%-Vertrauensniveau ergibt sich die Vertrauensgrenze zu

$$\tau \frac{s_T}{\sqrt{n}} = 0{,}00117\mathrm{s}\,.$$

Zur Berechnung der Messunsicherheit u_T wird noch der systematische Fehler ΔT_s benötigt, der sich – wie oben erläutert – auf den Gangfehler $\pm 0{,}000835$ s reduziert

$$u_T = 0{,}000835\,\mathrm{s} + 0{,}00117\,\mathrm{s} \approx 0{,}0020\,\mathrm{s} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{u_T}{T} = 0{,}0012\,.$$

Da der zufällige Fehleranteil überwiegt, ist das quadratische Fehlerfortpflanzungsgesetz anzuwenden

$$\begin{aligned} \frac{u_g}{g} &= \sqrt{\left(\frac{u_l}{l}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{u_T}{T}\right)^2} \\ &= 10^{-4}\sqrt{52 + (2 \cdot 12)^2} \\ &= 0{,}0025\,. \end{aligned}$$

Mit

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} = \frac{4\pi^2\, 0{,}6924\,\mathrm{m}}{(1{,}669\mathrm{s})^2} = 9{,}8131 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

lautet das Schlussergebnis unter Beachtung der Rundungsregeln

$$\underline{\underline{g = 9{,}8131(1 \pm 0{,}25\%)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}\,.$$

Bei Anwendung des linearen Fehlerfortpflanzungsgesetzes hätte sich in diesem Beispiel nur eine geringfügig höhere Messunsicherheit ergeben, nämlich 0,31% statt 0,25%.

9.2.4 Beispiel für eine bestehende Abhängigkeit der Fehler

Wie genau lässt sich das Verhältnis $V = g/h$ der Seiten g und h eines Rechtecks bestimmen, wenn die beiden Längen $g = 995{,}3\,\mathrm{mm}$ und $g = 898{,}8\,\mathrm{mm}$ mit demselben Holzlineal gemessen wurden? Dabei werde vorausgesetzt, dass stets derselbe Strich des Maßstabes – bequemerweise der Teilstrich Null – mit dem Anfangspunkt der zu messenden Strecke in Deckung gebracht wird.

Das Holzlineal hat eine mm-Teilung. Der zufällige Fehler der Längenmessung ist mit maximal $\pm 0{,}3\,\mathrm{mm}$ anzunehmen. Der systematische Fehler ist

$$\Delta l_s = \pm(a + b \cdot l) = \pm(0{,}5\mathrm{mm} + 10^{-3} \cdot l)\,.$$

Mit ca. 1,5 mm ist er größer als der zufällige Fehler. Somit ist die lineare Fehlerfortpflanzung anzuwenden.

In der Formel für den systematischen Fehler der Längenmessung berücksichtigt das Glied $b \cdot l$ ein Schwinden oder Verlängern des gesamtem Maßstabes nach der Produktion. Das Glied a gibt im wesentlichen den Größtfehler an, der beim Messen dadurch entstehen kann, dass die eingeritzten, geätzten oder aufgedruckten Teilungsstriche um ihre idealen Solllagen streuen. Die größte Abweichung, die ein Strich haben kann, ist $\pm a/2$. Daher ist es übersichtlicher, die Formel in folgender Weise zu schreiben

$$\Delta l_s = \left(\pm\frac{a}{2}\right) + (\pm b \cdot l) + \left(\pm\frac{a}{2}\right)\,,$$

wobei sich das erste Glied der Summe auf den Anfangsstrich des Maßstabes beziehen soll, das letzte dagegen auf den Teilstrich, bei dem die Ablesung des Streckenendes erfolgt.

Der Fehler des Anfangsstriches geht bei beiden Messungen mit dem gleichen Vorzeichen ein. Der durch $\pm b \cdot l$ beschriebene Fehler wirkt sich bei beiden Messungen ebenfalls im gleichen Sinn aus und ist – den ungünstigste Fall annehmend – mit dem gleichen Vorzeichen wie der erste Term zu versehen (ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann das Plus-Zeichen gewählt werden). Das Vorzeichen des Fehlers der Striche, bei dem die Streckenenden g und h abgelesen werden, bleibt unbestimmt. Diese Vorzeichenunbestimmtheit hat er mit den zufälligen Fehlern Δg_z und Δh_z gemeinsam.

Man erhält

$$\begin{aligned}
\Delta g &= \frac{a}{2} + b \cdot g \pm \left(\frac{a}{2} + |\Delta g_z|\right)\,, \\
\Delta h &= \frac{a}{2} + b \cdot h \pm \left(\frac{a}{2} + |\Delta h_z|\right)\,.
\end{aligned}$$

Lineare Fehlerfortpflanzung für $V = g/h$ ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta V}{V} &= \frac{\Delta g}{g} - \frac{\Delta h}{h} \\
&= \frac{\frac{a}{2} + b \cdot g \pm \left(\frac{a}{2} + |\Delta g_z|\right)}{g} - \frac{\frac{a}{2} + b \cdot h \pm \left(\frac{a}{2} + |\Delta h_z|\right)}{h} \\
&= \left(\frac{a}{2g} - \frac{a}{2h}\right) \pm \frac{\frac{a}{2} + |\Delta g_z|}{g} \mp \frac{\frac{a}{2} + |\Delta h_z|}{h} \,.
\end{aligned}$$

Zur Berechnung der Messunsicherheit u_F muss vorausgesetzt werden, dass sich die Fehlereinflüsse im ungünstigsten Fall addieren

$$\frac{u_V}{V} = \left|\frac{a}{2g} - \frac{a}{2h}\right| + \left|\frac{\frac{a}{2} + |\Delta g_z|}{g}\right| + \left|\frac{\frac{a}{2} + |\Delta h_z|}{h}\right| \,.$$

Für die relative Messunsicherheit von V ergibt sich somit

$$\begin{aligned}
\frac{u_V}{V} &= \left|\frac{0{,}25}{995{,}3} - \frac{0{,}25}{898{,}8}\right| + \left|\frac{0{,}25 + 0{,}3}{995{,}3}\right| + \left|\frac{0{,}25 + 0{,}3}{898{,}8}\right| \\
&= 0{,}027 \cdot 10^{-3} + 0{,}553 \cdot 10^{-3} + 0{,}612 \cdot 10^{-3} \\
&\approx 0{,}12\% \,.
\end{aligned}$$

Die Fläche $A = g \cdot h$ ist dagegen nur mit einer relative Messunsicherheit $u_A/A = 0{,}4\%$ bestimmbar, weil wegen

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta h}{h} \,.$$

keinerlei Kompensation des systematischen Fehler möglich ist.

9.3 Ausgleich von Messwerten durch eine Gerade

Es soll der Elastizitätsmodul E bestimmt werden. Die Belastung $F_i = m_i \cdot g$ eines einseitig waagerecht eingespannten homogenen Stabes der Länge l mit rechteckigem Querschnitt (Höhe h, Breite d) wurde in 15 Stufen ($i = 1, 2, ..., 15$) erhöht. Dabei wurden die Auslenkungen s_i (sogenannter Biegepfeil) gemessen

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{m_i}{g}$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\frac{s_i}{mm}$	42,0	43,0	45,1	46,3	47,8	49,6	50,9	52,8	53,9	55,5

i	11	12	13	14	15
$\frac{m_i}{g}$	110	120	130	140	150
$\frac{s_i}{mm}$	57,3	58,5	60,0	61,6	63,1

Die absoluten Messunsicherheiten der an einem Stahlmaß mit mm-Teilung abgelesenen Auslenkungen s_i betragen $u_s = \pm 0{,}5$ mm. Die Unsicherheiten der eingestellten Werte m_i kann als vernachlässigbar klein angesehen werden.

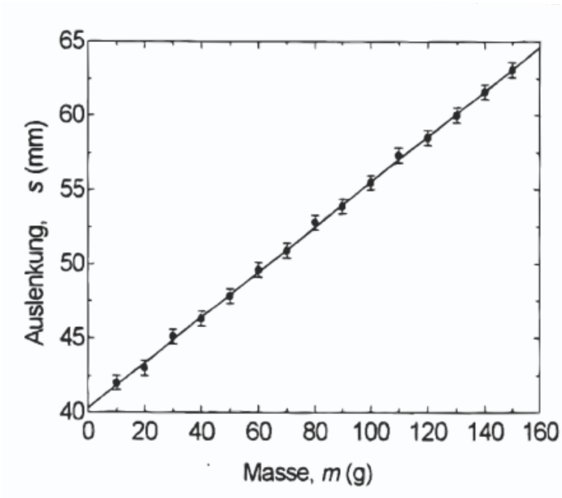

Abbildung 2: Abhängigkeit des Biegepfeils s von der Belastung eines einseitig waagerecht eingespannten Stabes mit unterschiedlichen Wägestücken m_i.

Für kleine Auslenkungen gilt

$$s = \frac{4l^3 g}{h^3 d E} m + s_0 ,$$

wobei E den Elastizitätsmodul und s_0 den Wert der Auslenkung ohne Belastung bezeichnen.

Die Ausgleichsrechnung zur Bestimmung der Geraden

$$s = a \cdot m + b ,$$

mit

$$a \equiv \frac{4l^3 g}{h^3 d E} \qquad \text{und} \qquad b \equiv s_0 ,$$

ergibt die Bestwerte $a^* = 0{,}152107$ mm/g und $b^* = 40{,}3248$ mm.

Für die Vertrauensgrenzen sind die Standardabweichungen der Parameter a und b, s_{a^*} und s_{b^*}, mit dem Faktor τ zu multiplizieren. Bei einem 95%-Vertrauensniveau und für $\nu = n - 2 = 15 - 2 = 13$ Freiheitsgrade ist $\tau = 2{,}160$. Damit werden die Vertrauensgrenzen zu $\tau \cdot s_{a^*} = 2{,}397 \cdot 10^{-3}$ mm/g und $\tau \cdot s_{b^*} = 0{,}2179$ mm berechnet.

Die Länge des Stabes wurde durch Messung mit einem Holzlineal, Höhe und Breite wurden mit einer Feinmessschraube ermittelt

$$\begin{aligned} l &= (802{,}0 \pm 0{,}6)\,\text{mm} , \\ h &= (5{,}989 \pm 0{,}014)\,\text{mm} , \\ b &= (5{,}998 \pm 0{,}017)\,\text{mm} . \end{aligned}$$

Mit diesen Angaben kann nunmehr der Elastizitätsmodul berechnet werden

$$E = \frac{4\,l^3 g}{h^3 d\, a^*} = \frac{4\,(802 \cdot 10^{-3}\text{m})^3\, 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{(5{,}989 \cdot 10^{-3}\text{m})^3\, 5{,}998 \cdot 10^{-3}\text{m}\, 0{,}152107\frac{\text{m}}{\text{kg}}} = 103{,}28\text{GPa} .$$

Durch Anwendung der linearen Fehlerfortpflanzung kann der absolute Größtfehler u_E des Elastizitätsmoduls E berechnet werden

$$u_E = \left|\frac{\partial E}{\partial l} u_l\right| + \left|\frac{\partial E}{\partial h} u_h\right| + \left|\frac{\partial E}{\partial d} u_d\right| + \left|\frac{\partial E}{\partial a^*}\ \tau \cdot s_{a^*}\right| .$$

Für die relative Messunsicherheit u_E/E ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{u_E}{E} &= 3\frac{u_l}{l} + 3\frac{u_h}{h} + \frac{u_d}{d} + \frac{\tau \cdot s_{a^*}}{a^*} \\
&= 3\frac{0{,}6\,\mathrm{mm}}{802\,\mathrm{mm}} + 3\frac{0{,}014\,\mathrm{mm}}{5{,}989\,\mathrm{mm}} + \frac{0{,}017\,\mathrm{mm}}{5{,}998\,\mathrm{mm}} + \frac{2{,}397 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mm/g}}{0{,}152107\,\mathrm{mm/g}} \\
&= 0{,}00224 + 0{,}00701 + 0{,}00283 + 0{,}01576 \\
&= 0{,}02784\,.
\end{aligned}$$

Das Ergebnis des Experimentes zur Bestimmung des Elastizitätsmodules lautet

$$\underline{\underline{E = 103{,}3(1 \pm 2{,}8\%)\,\mathrm{GPa}}} \qquad \text{bzw.} \qquad \underline{\underline{E = (103{,}3 \pm 2{,}9)\,\mathrm{GPa}}}\,.$$

Anhang

A1 Eingangs- und Rechenfehler

Bei einer nicht direkt messbaren Größe setzt sich der Fehler des Ergebnisses aus dem Eingangsfehler und dem Rechnungsfehler zusammen. Der Eingangsfehler besteht aus dem Messfehler, dessen Ermittlung in den vorhergehenden Abschnitten besprochen wurde, und dem Rundungsfehler der benutzten mathematischen und physikalischen Konstanten (wie z.B. π, $\sqrt{2}$, bzw. ϵ, g, c). Es ist zu beachten, dass Näherungswerte für die Konstanten mit einer ausreichenden Stellenzahl verwendet werden. Würde im zweiten Beispiel von Kap. 9.2.3 die Konstante π einfach durch 3,14 ersetzt werden, fiele das Ergebnis um 0,1% zu klien aus. der Rundungsfehler wäre dann nicht mehr vernachlässigbar gegen den Messfehler von $\pm$0,21%. Der Rechnungsfehler entsteht durch Begrenzungen der Genauigkeit während der Rechnung. er ist in den meisten Fällen vernachlässigbar, wenn ein elektronischer Taschenrechner benutzt wird. Der Rechnungsfehler muss mit einbezogen werden, wenn er größer als $1/10$ des Messfehlers ist.

A2 Berechnung des Fehlers einfacher Funktionen

Sind die Messgrößen x und y nur durch Additionszeichen oder Subtraktionszeichen verbunden,

$$F = x + y \quad \text{oder} \quad F = x - y\,,$$

so liefert die lineare Fehlerfortpflanzung nach Gl. (7.5) offenbar

$$u_F = u_x + u_y\,.$$

Daraus ergibt sich die einfache Regel, dass die **absolute** Messunsicherheit einer Summe oder Differenz gleich der Summe der Messunsicherheiten ist.

Diese Aussage gilt wohlgemerkt für die absolute Messunsicherheit. Bei einer Differenz ist zu beachten, dass die relative Messunsicherheit

$$\frac{u_F}{F} = \frac{u_x + u_y}{x - y}\,.$$

besonders groß wird, wenn sich x und y nur wenig unterscheiden. Bei quadratischer Fehlerfortpflanzung gilt

$$u_F = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}\,.$$

Produkt oder Quotient

Sind alle Messgrößen $x, y, w, \ldots$ **nur** durch Multiplikations- oder Divisionszeichen miteinander verbunden, gilt also z.B.

$$F = a\frac{x \cdot y}{w} \quad (a = \text{Konstante})\,,$$

so folgt unter der Voraussetzung linearer Fehlerfortpflanzung aus Gl. (7.5), dass sich die Beträge der **relativen** Messunsicherheiten der einzelnen Größen addieren:

$$\frac{u_F}{F} = \frac{u_x}{x} + \frac{u_y}{y} + \frac{u_w}{w} \,.$$

Unter der Voraussetzung quadratischer Fehlerfortpflanzung entsprechend Gl. (7.2) ergibt sich

$$\frac{u_F}{F} = \sqrt{\left(\frac{u_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{u_y}{y}\right)^2 + \left(\frac{u_w}{w}\right)^2} \,.$$

Diese für Produkte und Quotienten geltenden Ergebnisse dürfen nicht dazu verführen, anzunehmen, dass die relative Messunsichreheit eines zusammengesetzten Ergebnisses immer größer sein müsse als der größte relative Messgrößenfehler.

Produkt oder Quotient
Die **relative** Messunsicherheit einer m-tem Potenz ist gleich der m-fachen relativen Messunsicherheit der Grundzahl. Die **relative** Messunsicherheit einer n-ten Wurzel ist gleich dem n-ten Teil der relativen Messunsicherheit des Radikanden. Ist z.B.

$$F = a\frac{x^m}{\sqrt[n]{y}} \quad (a = \text{Konstante}) \,,$$

dann gilt bei linearer Fehlerfortpflanzung

$$\frac{u_F}{F} = m\frac{u_x}{x} + \frac{1}{n}\frac{u_y}{y} \,,$$

bei quadratischer Fehlerfortpflanzung

$$\frac{u_F}{F} = \sqrt{\left(m\frac{u_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\frac{u_y}{y}\right)^2} \,.$$

Literatur

[1] R. H. Leaver und T. R. Thomas, *Versuchsauswertung*, Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1977.

[2] J. R. Taylor, *Fehleranalyse: eine Einführung in die Untersuchung von Unsicherheiten in physikalischen Messungen*, VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim, 1988.

[3] P. R. Bevington, *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1969.

[4] *Leitfaden für den Gebrauch des Internationalen Einheitensystems*, Herausgegeben von der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt, bearbeitet von Peter Drath, 1996.

[5] W. H. Heini Gränicher, *Messung beendet - was nun?*, vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zürich und B. G. Teubner, Stuttgart, 1996.

[6] E. Hultzsch, *Ausgleichsrechnung mit Anwendungen in der Physik*, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig, 1971.

Institut für Physik, Universität Rostock, 2013
LaTeX-Version von Th. Bornath, Rechtschreibung wurde angepasst.