Rechenübungen

a) $$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \frac{1}{2-x}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

einfache Rechenregel bzw. Substitution mit u = x-2, d.h. dx/du = 1

b) $$\int_{1}^{2} (xe^{-x})\,dx = -(x+1)e^{-x}\Big|_{1}^{2} = 2e^{-1} - 3e^{-2}$$

part. Integration

c) $$\int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2}\Big|_{0}^{1} = 1$$

Substitution u=sqrt(1-x^2) → int(du)

d) $$\int_{-1}^{0} x\cdot\sqrt{x+1}^{3}\,dx = \frac{2}{7}\sqrt{x+1}^{7} - \frac{2}{5}\sqrt{x+1}^{5}\Big|_{0}^{1} = -\frac{4}{35}$$

Substitution u = sqrt(x+1)

e) $$\int_{1}^{2} \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \frac{(\ln(x))^2}{2}\bigg|_{1}^{2} = \frac{(\ln(2))^2}{2}$$

Partielle Integration → ergibt dasselbe Integral auf der linken Seite
→ Auflösen → Faktor 1/2

f) $$\int_{0}^{4} (\mathrm{x}-2)^2\cdot\sin(x-2)\,dx = 0$$

(ungerade um x = 2)

oder 2x partielle Integration

Berechnen Sie die Fläche zwischen Graph und x-Achse:

$$f(x) = x - 2$$ im Bereich von x = 0 bis x = 4

$$\int_0^4 |f(x)|dx = \left|\int_0^2 (x-2)dx\right| + \left|\int_2^4 (x-2)dx\right| = 2\left|\int_0^2 (x-2)dx\right| = 2\left|\left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Big|_0^2\right| = 4$$

Sportwagen

a) Bestimmen Sie die Höchstgeschwindigkeit $v_{\text{max}} = v(t_0)$.

$$\mathrm{v}(t) = \frac{a_0}{2}\int_0^t \left(1+\cos\left(\pi\frac{t'}{t_0}\right)\right)dt' = \frac{a_0}{2}\left(t+\frac{t_0}{\pi}\sin\left(\pi\frac{t}{t_0}\right)\right) \Rightarrow\ v_{max} = \frac{a_0 t_0}{2}$$

b) Welche Geschwindigkeit könnte ein Sportwagen mit a_0 = 10 m/s² und v_{max} = 60 m/s) aus dem Stand heraus nach 1s, 5s bzw. 10s erreichen?

$t_0 = \frac{2v_{max}}{a_0}$=12s ⇒ v(1s)=9,94m/s; v(5s)=43,5m/s; v(10s)=59,5m/s

c) Welche Strecke hat der Sportwagen aus b) bis zu den angegebenen Zeiten zurückgelegt?

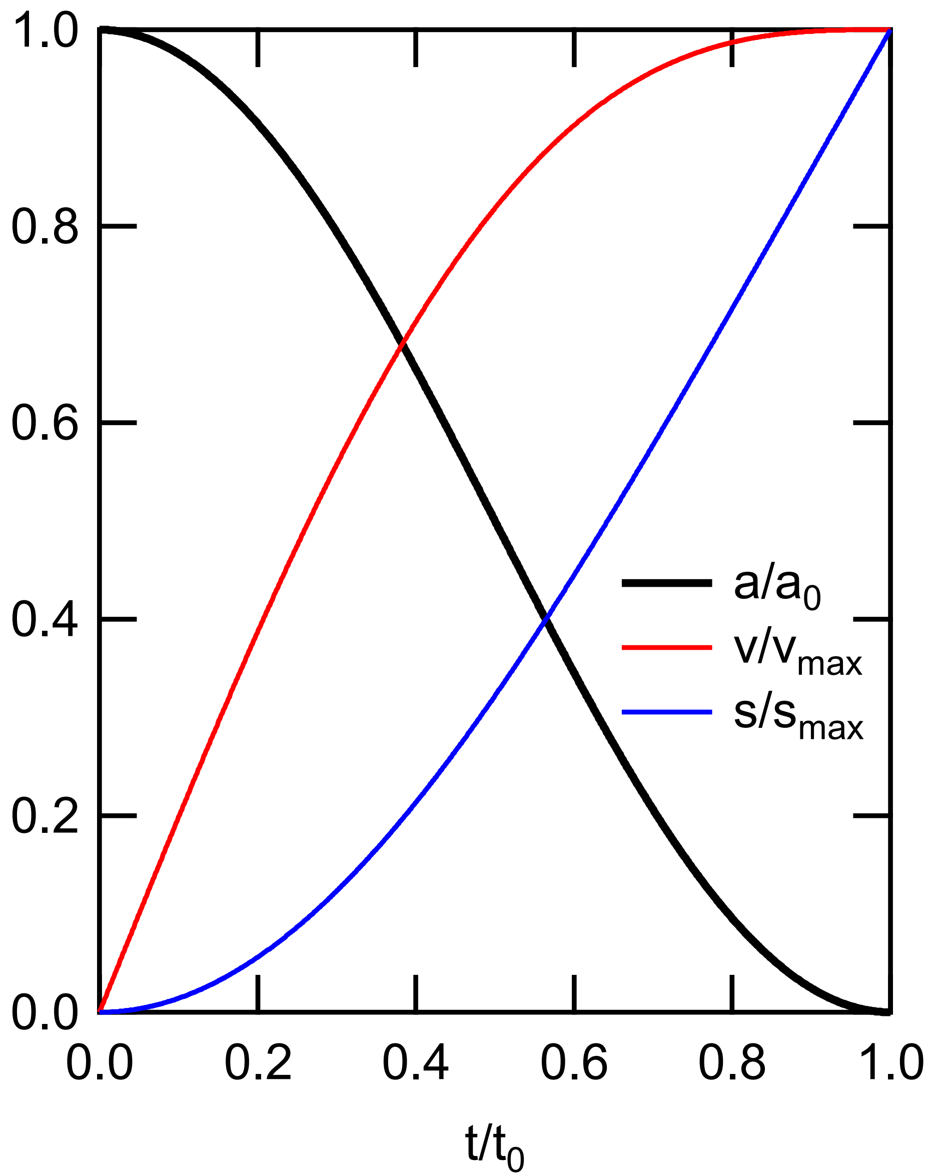
$$s(t) = \frac{a_0}{2}\int_0^t \left(t'+\frac{t_0}{\pi}\sin\left(\pi\frac{t'}{t_0}\right)\right)dt' = \frac{a_0}{2}\left(\frac{t^2}{2}-\frac{{t_0}^2}{\pi^2}\left(\cos\left(\pi\frac{t}{t_0}\right)-1\right)\right)$$

s(1s)=4,98m; s(5s)=116,6m; s(10s)=386,1m

d) Welche Strecke ist nötig, um die Höchstgeschwindigkeit zu erreichen?

$$s(t_0) = \frac{a_0}{2}\left(\frac{{t_0}^2}{2}-\frac{{t_0}^2}{\pi^2}(-1-1)\right) = a_0{t_0}^2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi^2}\right) = 505{,}9\mathrm{m}$$

(Bei konstant maximaler Beschleunigung a_0 wären 180m ausreichend; Es wäre fatal gewesen, wenn Marty McFly und Doc Brown mit $s=1/2\cdot a\cdot t^2$ gerechnet hätten!)

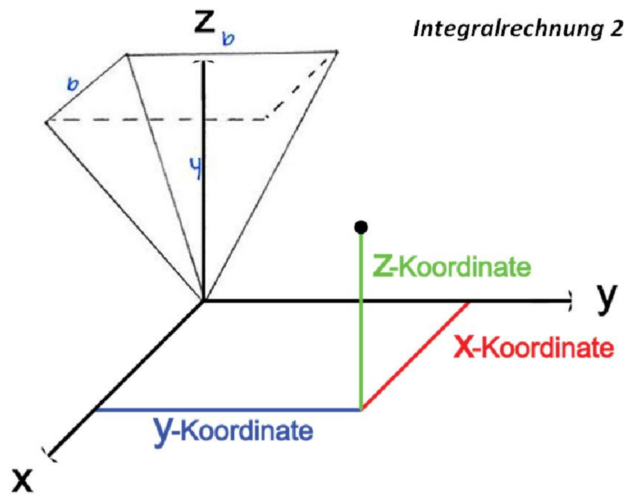

1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
t/t0
a/a0
v/vmax
s/smax

Arbeit im Gravitationsfeld

$$W = \int_{s_0}^{s_1} \vec{F} d\vec{s} = \int_{r_0}^{r_1} F dr = G \cdot m_1 \cdot m_2 \int_{r_0}^{r_1} \frac{1}{r^2} dr = -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r}\bigg|_{r_0}^{r_1} = -G \cdot m_1 \cdot m_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right)$$

$W_{geo} = 5{,}3 \cdot 10^{10}$ J; $W_{Mond} = 6{,}1 \cdot 10^{10}$ J $\Rightarrow$ kein signifikanter Unterschied, obwohl Strecke 5 mal weiter!

Pyramide



$$V = \iiint dx\, dy\, dz = \int_0^h dz \int_{-\frac{az}{2h}}^{\frac{az}{2h}} dy \int_{-\frac{az}{2h}}^{\frac{az}{2h}} dx$$

$$= \int_0^h \frac{a^2}{h^2} z^2 dz = \frac{a^2}{h^2} \frac{z^3}{3} \bigg|_0^h = \frac{1}{3} a^2 h$$